Serie Investigación y Desarrollo

INSTITUTO DE INGENIERÍA UNAM

Agrietamiento en la periferia de un valle sometido a bombeo

JESÚS ALBERRO
GUSTAVO AYALA
ROGELIO HERNÁNDEZ

SID/649
JULIO 2006

ISBN 970-32-0196-2 ISBN 970-32-3557-3

ISBN 970-32-3557-3

Agrietamiento en la periferia de un valle sometido a bombeo

JESÚS ALBERRO *
GUSTAVO AYALA *
ROGELIO HERNÁNDEZ**

*Investigador, Instituto de Ingeniería, UNAM
**Técnico Académico, Instituto de Ingeniería, UNAM

ABSTRACT

In the Celaya, Aguascalientes, Querétaro, Toluca and México Valleys, the ground water withdrawal induces several effects and particularly fractures along the valleys frontiers.

In this research, hydraulic potentials and seepage forces due to transitory flow during withdrawal are determined and the corresponding states of stresses and deformations are mathematically and/or numeralically resolved. In particular zones which are submitted to tension stresses are localized in accordance with the withdrawal's time elapsed.

Finally, the observational data collected in the Celaya's Valley case are compared with the results of analysis.

RESUMEN

En los valles de Celaya, Aguascalientes, Querétaro, Toluca y México, se observan los múltiples efectos de un bombeo prolongado del agua subterránea y, en particular, el desarrollo de grietas en las orillas del valle.

En esta investigación se analiza, matemática y numéricamente, la variación del potencial hidráulico en los materiales que conforman el valle durante el flujo transitorio ocasionado por el bombeo y las fuerzas de filtración inducidas en el subsuelo. Posteriormente se determinan los campos de esfuerzos y deformaciones resultantes y, en particular, la magnitud y localización de las zonas del valle sometidas a tensiones que propician el agrietamiento y que varían con la duración del bombeo.

Finalmente, se comparan los resultados de este análisis con las observaciones de campo correspondientes al caso del valle de Celaya.

1. INTRODUCCIÓN

En amplias zonas del territorio nacional, el abastecimiento de agua para fines urbanos y agrícolas proviene de la explotación de acuíferos. Tal es el caso de los valles de Celaya, Aguascalientes, Querétaro, Toluca y México, entre otros, en los que se observan los múltiples efectos de un bombeo prolongado: asentamientos y movimientos horizontales de la superficie del terreno, así como desarrollo de grietas en las orillas del valle (ref 1).

En el caso de la fosa de Celaya, limitada por un escalón sepultado con un salto de 200 m, se han presentado dos grietas de 7 y 10 km de longitud, ambas con saltos de 1 m y otra más de 500 m con salto de 15 cm. Las tres grietas son paralelas, distantes de 800 a 900 m entre sí y orientadas de SSE a NNW (ref 2).

En la ciudad de Aguascalientes, se han observado diez grietas sensiblemente paralelas al río San Pedro que constituye la faja hundida. Los saltos en las grietas más antiguas son de 70 cm (ref 3).

El fenómeno de agrietamiento en el valle de la ciudad de Querétaro se ha manifestado a partir de 1955 a consecuencia de la sobrexplotación de los acuíferos. La grieta más notoria tiene una longitud de aproximadamente 4.5 km, con dirección N-S, y ha afectado a numerosas estructuras (ref 4).

A partir de 1970, la operación de los nuevos pozos de bombeo localizados en los valles de Toluca e Ixtlahuaca, indujo en una faja de kilómetro y medio de ancho, vecina a la batería de pozos, un agrietamiento intenso (ref 5).

En el valle de México, sometido a un bombeo intensivo desde 1940, han ocurrido dos grietas notables en la zona de Naucalpan, denominadas La Florida y Echegaray. Son sensiblemente paralelas con dirección E-W, separadas 800 m entre sí y ambas de 1800 m de longitud, con saltos de hasta 75 cm (ref 6). Así mismo, en la calle Río Lerma de la ciudad de México, se detectaron en los años setenta “movimientos en la junta central del pavimento de concreto y varias viviendas antiguas fueron dañadas por grietas paralelas a dicha calle” (ref 7).

Además de los casos anteriores, se han notado grietas por bombeo del agua subterránea en los valles de Abasolo, Apaseo el Grande, Villagrán y Santa Cruz de Juventino Rosas (ref 2), lo cual subraya la magnitud del problema en México.

2. CONDICIONES NECESARIAS PARA EL AGRIETAMIENTO

La causa primaria de este tipo de grietas es, sin duda alguna, el bombeo del agua subterránea y la consiguiente generación de fuerzas de filtración en el subsuelo. Sin embargo, para que se presente una grieta en el terreno es necesario, además, que las fuerzas de filtración generen esfuerzos efectivos de tensión en el medio. Esto puede darse únicamente si las fuerzas de filtración son divergentes, lo cual implica ciertas condiciones geométricas para las fronteras del valle involucrado. En efecto, un flujo unidimensional solo induce esfuerzos efectivos de compresión en la masa del terreno afectado (fig 2.1), mientras que un flujo bidimensional con líneas de flujo divergentes induce esfuerzos efectivos de tensión como en el caso presentado en la fig 2.2. Es más, para que se presente una grieta es necesario que los esfuerzos efectivos de tensión inducidos por el flujo divergente sean, en un momento y lugar dados del subsuelo, superiores a la suma de los esfuerzos iniciales efectivos de compresión debidos al peso propio del terreno y de su resistencia a la tensión. Por tanto, mientras mayores sean los gradientes de flujo, mayores serán las probabilidades de generar una grieta en zonas cercanas a la superficie del terreno, constituidos por suelos de baja resistencia a la tensión.

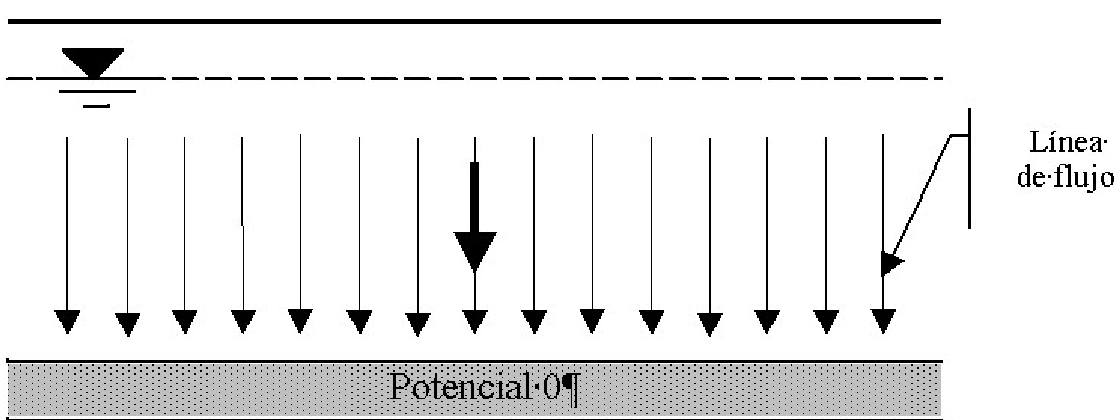


Fig 2.1 Consolidación unidimensional

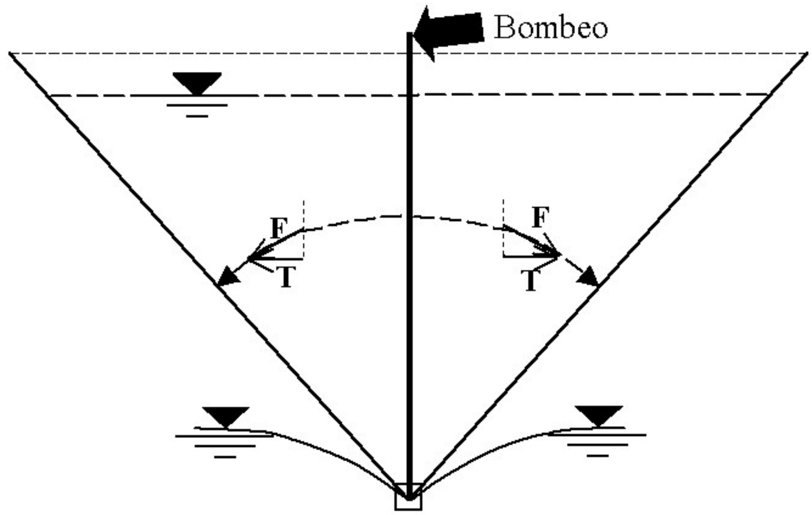


Fig 2.2 Consolidación bidimensional (T *componente horizontal de la fuerza de filtración* F)

En resumen, las condiciones necesarias aunque no suficientes para que se presente el agrietamiento de la superficie de un valle sometido a bombeo son:

- El flujo de agua ha de ser bi o tridimensional, con líneas de flujo divergentes
- Los gradientes de flujo han de ser grandes
- El material de relleno del valle debe de ser de baja resistencia a la tensión.

3. MODELO MATEMÁTICO DEL FLUJO DE AGUA

Al presentarse un flujo transitorio de agua en una masa de suelo homogéneo y saturado, se generan fuerzas de filtración $\vec{F}$, cuya expresión por unidad de volumen del suelo es

$$\vec{F} = -\gamma_w \mathrm{grad}\varphi \tag{1}$$

siendo φ el potencial hidráulico.

Por tanto, es importante definir las condiciones de flujo de agua y determinar φ, antes de iniciar el estudio del efecto de las fuerzas de volumen, $\vec{F}$, en el estado de esfuerzos.

La función φ se determina analíticamente, mediante la solución de la ecuación diferencial

$$C_v \nabla^2 \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \tag{2}$$

para flujo transitorio, con

C_v	coeficiente de consolidación del suelo
$\nabla^2\varphi$	laplaciano de la función φ
t	el tiempo transcurrido desde el inicio del bombeo

Para ser solución del problema, el potencial φ debe además cumplir con las condiciones hidráulicas de frontera. La determinación de este potencial ha sido objeto de numerosas publicaciones para casos de interés ingenieril (refs 8 y 9). Se consideran en lo subsiguiente y para el problema del agrietamiento en las orillas de un valle, tres configuraciones geométricas de las fronteras de éste:

a) Un triángulo rectángulo simétrico, respecto a la vertical (fig 3.1a).
b) Un triángulo rectángulo cuya bisectriz forma un ángulo α, respecto a la vertical (fig 3.1b).
c) Un triángulo cualquiera, cuya bisectriz forma un ángulo α, con la vertical (fig 3.1c).

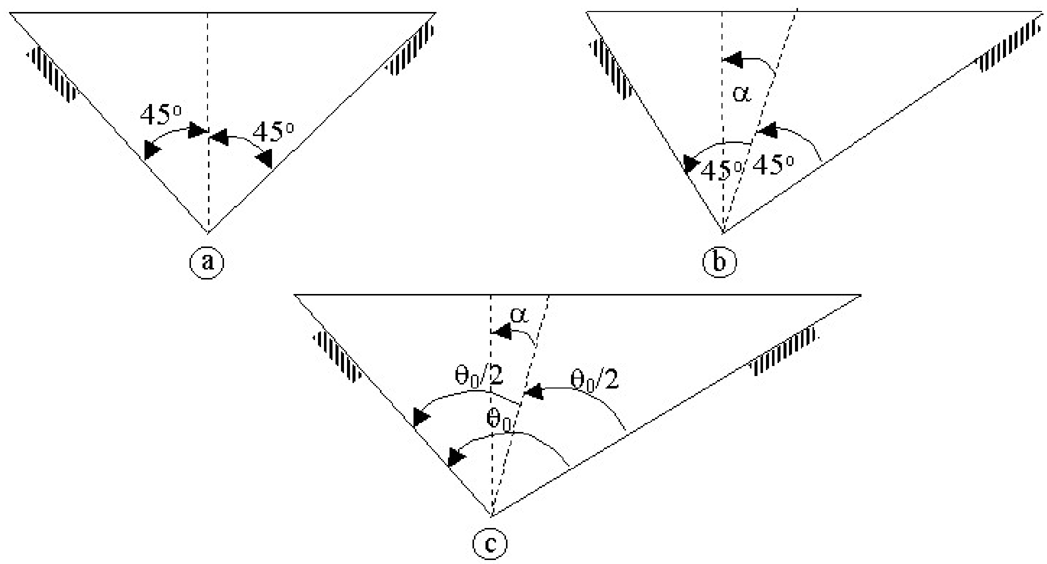


Fig 3.1 Geometrías de valle consideradas

3.1 Análisis del caso a

Se considera un valle de longitud infinita con sección triangular recta, simétrica con respecto a la vertical, y sometido a bombeo de tal suerte que la presión del agua en sus fronteras laterales sea nula.

Por tanto, en las fronteras laterales del valle y durante el bombeo, el potencial hidráulico es igual al potencial de posición *h*. Además, se supone que el nivel freático coincide con la superficie libre del terreno, al inicio del bombeo (fig 3.2).

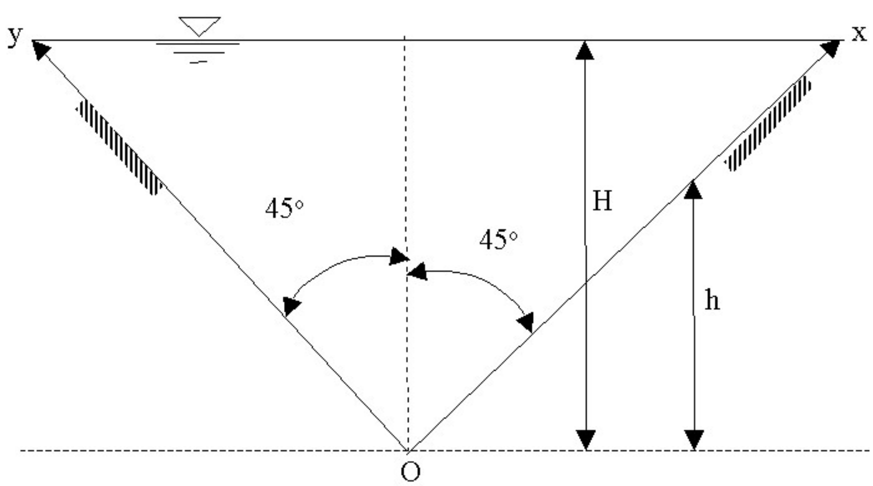


Fig 3.2 Caso a

Las condiciones de frontera del potencial son, en el sistema de coordenadas x, y:

$$\left.\begin{array}{lll} \varphi = H & \text{para } t = 0 & x, y \neq 0 \\ \varphi = h = \dfrac{x}{\sqrt{2}} & \text{para } t \rangle 0 & y = 0 \\ \varphi = h = \dfrac{y}{\sqrt{2}} & \text{para } t \rangle 0 & x = 0 \end{array}\right] \qquad (3)$$

La función φ, solución de la ec 2 y que cumple con estas condiciones (3), es

$$\varphi = H \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{C_v t}}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{C_v t}}\right) + \frac{x}{\sqrt{2}} \operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{C_v t}}\right) + \frac{y}{\sqrt{2}} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{C_v t}}\right)$$

siendo $\operatorname{erf}(u)$ y $\operatorname{erfc}(u)$ las funciones error y complementaria de error, respectivamente.

En efecto, se comprueba que, de acuerdo con la ec 2:

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{C_v}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \left(\frac{1}{2\sqrt{C_v t}}\right)^3 \left\{ \frac{4xy}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{-\left(\frac{x}{2\sqrt{C_v t}}\right)^2} + e^{-\left(\frac{y}{2\sqrt{C_v t}}\right)^2} \right] - \frac{4H}{\sqrt{\pi}} \left[\begin{array}{l} x \operatorname{erf}\left(\dfrac{y}{2\sqrt{C_v t}}\right) e^{-\left(\frac{x}{2\sqrt{C_v t}}\right)^2} \\ + y \operatorname{erf}\left(\dfrac{x}{2\sqrt{C_v t}}\right) e^{-\left(\frac{y}{2\sqrt{C_v t}}\right)^2} \end{array} \right] \right\}$$

Y que esta función φ cumple con las condiciones de frontera del potencial (3), tomando en cuenta que:

$$\operatorname{erf}(0) = 0 \qquad \operatorname{erf}(\infty) = 1$$

$$\operatorname{erfc}(0) = 1 \qquad \operatorname{erfc}(\infty) = 0$$

Esta función φ es suma de las funciones,

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$$

con

$$\varphi_0 = H \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{C_v t}}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{C_v t}}\right)$$

$$\varphi_1 = \frac{x}{\sqrt{2}} \operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{C_v t}}\right) + \frac{y}{\sqrt{2}} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{C_v t}}\right)$$

Se comprueba que ambas funciones cumplen con la ec 2 y que las condiciones de frontera en potencial, propias de cada una son:

$\varphi_0 = H$	para $t = 0$	y	x, y cualesquiera
$\varphi_0 = 0$	para $t \geq 0$	y	$x = 0$ ó $y = 0$
$\varphi_0 = 0$	para $t \to \infty$	y	x, y cualesquiera
$\varphi_1 = 0$	para $t = 0$	y	x, y cualesquiera
$\varphi_1 = \frac{x}{\sqrt{2}}$	para $t \rangle 0$	y	$y = 0$
$\varphi_1 = \frac{y}{\sqrt{2}}$	para $t \rangle 0$	y	$x = 0$
$\varphi_1 = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} = h$	para $t \to \infty$	y	x,y cualesquiera

La solución presentada es, por tanto, válida mientras no se presente un descenso del nivel freático inicial.

En consecuencia, para este caso *a*, las fuerzas de filtración actuantes son, en el sistema de coordenadas x, y:

$$\left.\begin{aligned} F_x &= -\gamma_w \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{-\gamma_w H}{\sqrt{\pi C_v t}} e^{-\left(\frac{x}{2\sqrt{C_v t}}\right)^2} \operatorname{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{C_v t}}\right) - \frac{\gamma_w}{\sqrt{2}} \operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{C_v t}}\right) + \frac{y\gamma_w}{\sqrt{2\pi C_v t}} e^{-\left(\frac{x}{2\sqrt{C_v t}}\right)^2} \\ F_y &= -\gamma_w \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{-\gamma_w H}{\sqrt{\pi C_v t}} e^{-\left(\frac{y}{2\sqrt{C_v t}}\right)^2} erf\left(\frac{x}{2\sqrt{C_v t}}\right) - \frac{\gamma_w}{\sqrt{2}} erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{C_v t}}\right) + \frac{x\gamma_w}{\sqrt{2\pi C_v t}} e^{-\left(\frac{y}{2\sqrt{C_v t}}\right)^2} \end{aligned}\right] \quad (4)$$

Si bien estas expresiones pueden parecer complicadas, son simples de calcular numéricamente mediante un programa de computación que se presentará más adelante.

3.2 Análisis del caso b

Se considera un valle de longitud infinita con sección triangular recta, cuya bisectriz forma un ángulo α con la vertical, y sometido a bombeo de tal suerte que la presión del agua en sus fronteras laterales sea nula. Por tanto, el potencial hidráulico en las fronteras laterales del valle y durante el bombeo es igual al potencial de posición *h*. Además, se supone que el potencial permanece constante e igual a *H*, en todo momento en la superficie libre del terreno (fig 3.3):

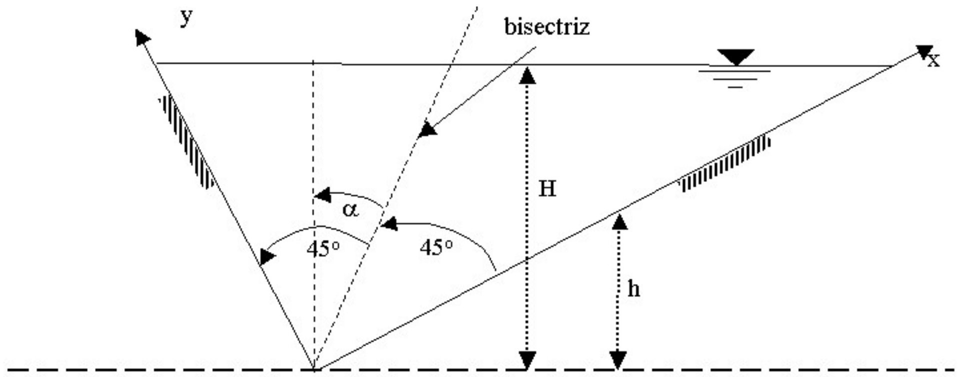


Fig 3.3 Caso b

Las condiciones de frontera del potencial son, en el sistema de ejes x, y:

$$
\begin{array}{llll}
\varphi = H & \text{para } t=0 & \text{y} & x, y \text{ cualesquiera} \\
\varphi = h = x\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right) & \text{para } t\rangle 0 & \text{y} & y=0 \\
\varphi = h = y\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right) & \text{para } t\rangle 0 & \text{y} & x=0 \\
\varphi = h = x\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)+y\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right) & \text{para } t=\infty & \text{y} & x, y \text{ cualesquiera}
\end{array}
\quad (5)
$$

La función φ solución de la ec 2 y que cumple con la ec 5 es:

$$
\varphi = H\,\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{C_v t}}\right)\mathrm{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{C_v t}}\right)+x\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\mathrm{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{C_v t}}\right)+y\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{C_v t}}\right) \quad (6)
$$

Siendo erf (u) y erfc(u) las funciones error y complementaria de error, respectivamente.

En efecto, se comprueba que cumple con la ec 2, pues

$$
\nabla^2\varphi = \frac{1}{C_v}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \left(\frac{1}{2\sqrt{C_v t}}\right)^3 \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{4xy}{\sqrt{\pi}}\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)e^{-\left(\frac{x}{2\sqrt{C_v t}}\right)^2}+\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)e^{-\left(\frac{y}{2\sqrt{C_v t}}\right)^2}\right] \\ -\dfrac{4H}{\sqrt{\pi}}\left[\begin{array}{l} x\,\mathrm{erf}\left(\dfrac{y}{2\sqrt{C_v t}}\right)e^{-\left(\frac{x}{2\sqrt{C_v t}}\right)^2} \\ +y\,\mathrm{erf}\left(\dfrac{x}{2\sqrt{C_v t}}\right)e^{-\left(\frac{y}{2\sqrt{C_v t}}\right)^2} \end{array}\right] \end{array} \right\}
$$

Esta función cumple con la ec 5, tomando en cuenta que

$$\operatorname{erf}(0) = 0 \qquad \operatorname{erf}(\infty) = 1$$
$$\operatorname{erfc}(0) = 1 \qquad \operatorname{erfc}(\infty) = 0$$

En consecuencia, en este caso, las fuerzas de filtración actuantes son, en el sistema de ejes *x*, *y*:

$$F_x = -\gamma_w \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{-\gamma_w H}{\sqrt{\pi C_v t}} e^{-\left(\frac{x}{2\sqrt{C_v t}}\right)^2} \operatorname{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{C_v t}}\right) - \gamma_w \cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{C_v t}}\right)$$
$$+\frac{\gamma_w}{\sqrt{\pi C_v t}} y \cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) e^{-\left(\frac{x}{2\sqrt{C_v t}}\right)^2}$$

(7)

$$F_y = -\gamma_w \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{-\gamma_w H}{\sqrt{\pi C_v t}} e^{-\left(\frac{y}{2\sqrt{C_v t}}\right)^2} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{C_v t}}\right) - \gamma_w \cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{C_v t}}\right)$$
$$+\frac{\gamma_w}{\sqrt{\pi C_v t}} x \cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) e^{-\left(\frac{y}{2\sqrt{C_v t}}\right)^2}$$

Si bien estas expresiones pueden parecer complicadas, son simples de calcular numéricamente mediante un programa de computación que se presentará más adelante.

3.3 Análisis del caso c

Se considera un valle de longitud infinita, con sección triangular y ángulo θ_0 en la cúspide (fig 3.4). El ángulo formado por la bisectriz y la vertical *h* es α.

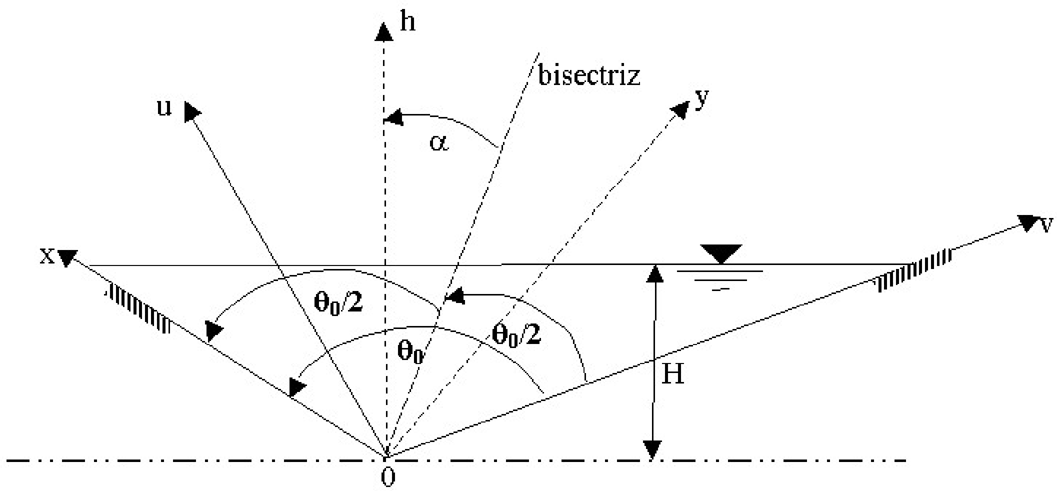


Fig 3.4 Caso c

Las fronteras laterales del valle, son los ejes x y v; respectivamente, perpendiculares a los ejes y y u.

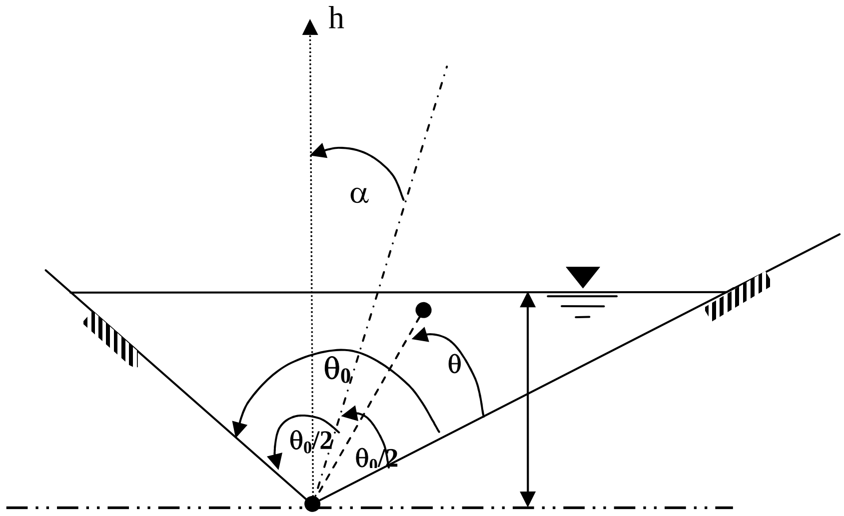
Se considera, para solucionar este caso, la superposición de dos potenciales φ_0 y φ_1, con las consiguientes condiciones de frontera:

$\varphi_0 = H$	para $t = 0$	y	x, y cualesquiera
$\varphi_0 = 0$	para $t \geq 0$	y	$y = 0$ ó $u = 0$
$\varphi_0 = 0$	para $t \to \infty$	y	x, y cualesquiera
$\varphi_1 = 0$	para $t = 0$	y	x, y cualesquiera
$\varphi_1 = h$	para $t \rangle 0$	y	$y = 0$
$\varphi_1 = h$	para $t \rangle 0$	y	$u = 0$
$\varphi_1 = h$	para $t \to \infty$	y	x, y cualesquiera

La suma de las funciones φ_0 y φ_1, suponiendo que ambas son solución de la ec 2, corresponde a la solución del caso siempre y cuando, durante el bombeo, la presión del agua en las fronteras laterales del valle analizado sea nula.

3.3.1 Potencial φ_0

Se considera un sistema polar de ejes (ρ,θ) (fig 3.5) y se siguen los lineamientos de la solución propuesta en la ref 9.



3.5 Sistema polar de referencia (ρ,θ)

En este sistema de ejes, las condiciones de frontera son:

$$\begin{array}{llll} \varphi_0 = \mathrm{H} & \text{para } t=0 & \text{y} & \rho,\ \theta \text{ cualesquiera} \\ \varphi_0 = 0 & \text{para } t \rangle 0 & \text{y} & \theta = 0 \text{ y } \theta = \theta_0 \\ \varphi_0 = 0 & \text{para } t \to \infty & \text{y} & \rho,\ \theta \text{ cualesquiera} \end{array} \tag{8}$$

La solución que cumple con la expresión 2 y con las anteriores condiciones de frontera es

$$\varphi_0 = \frac{4H}{\theta_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \operatorname{sen}(s\theta) \left[\int_0^{\infty} e^{-C_v t u^2} \frac{J_s(u\rho)}{u} du \right] \right\}$$

con

$$s = \frac{(2n+1)\pi}{\theta_0} \tag{9}$$

$$J_s(u\rho) = \text{función de Bessel igual con} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^m \left(\frac{1}{2} u\rho \right)^{s+2m}}{m!\Gamma(m+s+1)} \right\}$$

En efecto,

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial r} = \frac{4H}{\theta_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \operatorname{sen}(s\theta) \left[\int_0^{\infty} e^{-C_v t u^2} J_s'(u\rho) du \right] \right\}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial r^2} = \frac{4H}{\theta_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \operatorname{sen}(s\theta) \left[\int_0^{\infty} e^{-C_v t u^2} u J_s''(u\rho) du \right] \right\}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \theta^2} = -\frac{4H}{\theta_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ s^2 \operatorname{sen}(s\theta) \left[\int_0^{\infty} e^{-C_v t u^2} \frac{J_s(u\rho)}{u} du \right] \right\}$$

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} = -\frac{4H}{\theta_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \operatorname{sen}(s\theta) \left[C_v \int_0^{\infty} e^{-C_v t u^2} u J_s(u\rho) du \right] \right\}$$

por lo que

$$\nabla^2 \varphi_0 = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \theta^2} = \frac{4H}{\theta_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \operatorname{sen}(s\theta) \left[\int_0^{\infty} \left\{ u \begin{bmatrix} J_s''(u\rho) + \frac{1}{u\rho} J_s'(u\rho) \\ -\left(\frac{s}{u\rho} \right)^2 J_s(u\rho) \end{bmatrix} e^{-c_V t u^2} \right\} du \right] \right\}$$

Tomando en cuenta que la función de Bessel, $J_s(u\rho)$, verifica la ecuación diferencial

$$J_s''(u\rho)+\frac{1}{u\rho}J_s'(u\rho)+\left[1-\left(\frac{s}{u\rho}\right)^2\right]J_s(u\rho)=0$$

resulta que

$$\nabla^2\varphi_0=-\frac{4H}{\theta_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\operatorname{sen}(s\theta)\left[\int_0^{\infty}\left\{uJ_s(u\rho)e^{-c_V tu^2}\right\}du\right]\right\}=\frac{1}{C_v}\frac{\partial\varphi_0}{\partial t}$$

Además, tomando en cuenta que, como se señala en la ref 10,

$$\int_0^{\infty}\frac{J_s(u\rho)}{u}du=\frac{1}{s}$$

y que $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(s\theta)}{s}=\frac{\theta_0}{4}\qquad \text{si } 0\le\frac{\pi\theta}{\theta_0}\le\pi$$

de acuerdo con la ref 11, resulta que

para $t=0$	$\varphi_0=H$	
para $t\rangle 0$	$\varphi_0=0$	$\theta=0$ ó $\theta=\theta_0$
para $t\to\infty$	$\varphi_0\to 0$	$0\le\theta\le\theta_0$, ρ cualesquiera

Se cumplen, por tanto, las condiciones de frontera (8).

Las correspondientes fuerzas de filtración son, con el cambio de variable:

$$\upsilon=u\rho$$

$$\left.\begin{aligned}F_\rho&=-\gamma_w\frac{\partial\varphi_0}{\partial\rho}=-\frac{8\gamma_w H}{\theta_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\operatorname{sen}(s\theta)\left[\int_0^{\infty}e^{-C_v t\left(\frac{v}{\rho}\right)^2}\frac{C_v t}{\rho^3}vJ_s(v)dv\right]\right\}\\F_\theta&=-\gamma_w\frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi_0}{\partial\theta}=-\frac{4\gamma_w H}{\rho\theta_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{s\cos(s\theta)\left[\int_0^{\infty}e^{-C_v t\left(\frac{v}{\rho}\right)^2}\frac{J_s(v)}{v}dv\right]\right\}\end{aligned}\right]\qquad(10)$$

De acuerdo con Watson (ref 10, p 394, expresión 3), la integral

$$\int_0^\infty e^{-C_v t\left(\frac{v}{\rho}\right)^2} \frac{J_s(v)}{v} dv$$

es igual a

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\rho^2}{4C_v t}\right)^{\frac{s}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma(s+1)} {}_1F_1\left(\frac{s}{2}+1, s+1, \frac{\rho^2}{4C_v t}\right) e^{-\left(\frac{\rho^2}{4C_v t}\right)}$$

siendo

Γ la función euleriana gamma

${}_1F_1$ la función hypergeométrica confluyente

Así mismo, la integral

$$\int_0^\infty e^{-C_v t\left(\frac{v}{\rho}\right)^2} v J_s(v) dv$$

es igual a

$$2\left(\frac{\rho^2}{4C_v t}\right)^{\frac{s}{2}+1} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}{\Gamma(s+1)} {}_1F_1\left(\frac{s}{2}, s+1, \frac{\rho^2}{4C_v t}\right) e^{-\left(\frac{\rho^2}{4C_v t}\right)}$$

Mediante estas expresiones, es fácil calcular numéricamente las magnitudes F_θ y F_ρ, utilizando el programa MAPLE.

3.3.2 Potencial φ_1

Se considera un sistema polar (fig 3.5) de ejes (ρ,θ). El potencial φ_1 es

$$\varphi_1 = \frac{\cos\left(\frac{\theta_0}{2}-\alpha\right)}{\operatorname{sen}(\theta_0)} \rho \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{erfc}\left(\frac{\rho \operatorname{sen}(\theta_0-\theta)}{2\sqrt{C_v t}}\right) + \frac{\cos\left(\frac{\theta_0}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{sen}(\theta_0)} \rho \operatorname{sen}(\theta_0-\theta) \operatorname{erfc}\left(\frac{\rho \operatorname{sen}(\theta)}{2\sqrt{C_v t}}\right) \quad (11)$$

con $\theta_0 \neq \pi$

Para el caso de $\theta_0 = \pi$ y $\alpha = 0$, se cuenta con una solución simple:

$$\varphi = H\,\mathrm{erf}\left(\frac{h}{2\sqrt{C_v t}}\right)$$

que cumple con las condiciones de frontera:

$$\begin{array}{lll} \varphi_1 = 0 & \text{para } t = 0 & 0 \le \theta \le \theta_0,\ \rho \text{ cualesquiera} \\ \varphi_1 = h & \text{para } t \rangle 0 & \theta = 0 \text{ ó } \theta = \theta_0 \end{array}$$

Además, cuando t tiende a infinito,

$$\varphi_1 = \frac{\rho}{\mathrm{sen}(\theta_0)}\left[\mathrm{sen}(\theta)\cos\left(\frac{\theta_0}{2} - \alpha\right) + \mathrm{sen}(\theta_0 - \theta)\cos\left(\frac{\theta_0}{2} + \alpha\right)\right]$$

Y desarrollando esta expresión, se obtiene

$$\varphi_1 = \rho\cos\left(\frac{\theta_0}{2} + \alpha - \theta\right) = h \qquad \text{para } 0 \le \theta \le \theta_0$$

La función no cumple estrictamente con la condición 2. En efecto

$$\nabla^2\varphi_1 = \frac{1}{\mathrm{sen}(\theta_0)\sqrt{\pi C_v t}}\left[\cos\left(\frac{\theta_0}{2} + \alpha\right)^{-\frac{(\rho\,\mathrm{sen}(\theta))^2}{4C_v t}} + \cos\left(\frac{\theta_0}{2} - \alpha\right)e^{-\frac{(\rho\,\mathrm{sen}(\theta_0 - \theta))^2}{4C_v t}}\right]\left[\frac{\rho^{\,2}\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{sen}(\theta_0 - \theta)}{2C_v t} + 2\cos(\theta_0)\right]$$

y

$$\frac{1}{C_v}\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} = \frac{1}{\mathrm{sen}(\theta_0)\sqrt{\pi C_v t}}\left[\cos\left(\frac{\theta_0}{2} + \alpha\right)^{-\frac{(\rho\,\mathrm{sen}(\theta))^2}{4C_v t}} + \cos\left(\frac{\theta_0}{2} - \alpha\right)e^{-\frac{(\rho\,\mathrm{sen}(\theta_0 - \theta))^2}{4C_v t}}\right]\left[\frac{\rho^{\,2}\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{sen}(\theta_0 - \theta)}{2C_v t}\right]$$

por lo que

$$\nabla^2\varphi_1 = \frac{1}{C_v}\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} + \frac{2}{\tan(\theta_0)\sqrt{\pi C_v t}}\left[\cos\left(\frac{\theta_0}{2} + \alpha\right)^{-\frac{(\rho\,\mathrm{sen}(\theta))^2}{4C_v t}} + \cos\left(\frac{\theta_0}{2} - \alpha\right)e^{-\frac{(\rho\,\mathrm{sen}(\theta_0 - \theta))^2}{4C_v t}}\right]$$

Por tanto, la condición 2 se cumple estricta y únicamente para

$$\begin{cases} \theta_0 = \dfrac{\pi}{2} \text{ y } t \text{ cualesquiera} \\ \theta_0 \text{ cualesquiera} \ne \pi \text{ y } t \to \infty \end{cases}$$

Si θ_0 es cercano a $\frac{\pi}{2}$, la expresión φ_1 del potencial es aproximada.

Las fuerzas inducidas por el potencial φ_1 son

$$-\gamma_w \frac{\partial \varphi_1}{\partial \rho} = -\frac{\varphi_1 \gamma_w}{\rho} + \frac{\gamma_w}{\sqrt{\pi C_v t}} \rho \frac{\operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\theta_0-\theta)}{\operatorname{sen}(\theta_0)} \left[\cos\left(\frac{\theta_0}{2}+\alpha\right)^{-\frac{(\rho \operatorname{sen}(\theta))^2}{4C_v t}} + \cos\left(\frac{\theta_0}{2}-\alpha\right) e^{-\frac{(\rho \operatorname{sen}(\theta_0-\theta))^2}{4C_v t}} \right]$$

$$-\gamma_w \frac{1}{\rho}\frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} = \frac{\cos\left(\frac{\theta_0}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{sen}(\theta_0)} \gamma_w \left[\operatorname{sen}(\theta_0-\theta) e^{-\frac{(\rho \operatorname{sen}(\theta))^2}{4C_v t}} \frac{\rho \cos(\theta)}{\sqrt{\pi C_v t}} + \cos(\theta_0-\theta) \operatorname{erfc}\left(\frac{\rho \operatorname{sen}(\theta)}{2\sqrt{C_v t}}\right) \right]$$
$$-\frac{\cos\left(\frac{\theta_0}{2}-\alpha\right)}{\operatorname{sen}(\theta_0)} \gamma_w \left[\cos(\theta) \operatorname{erfc}\left(\frac{\rho \operatorname{sen}(\theta_0-\theta)}{2\sqrt{C_v t}}\right) + \operatorname{sen}(\theta) \frac{\rho \cos(\theta_0-\theta)}{\sqrt{\pi C_v t}} e^{-\frac{(\rho \operatorname{sen}(\theta_0-\theta))^2}{4C_v t}} \right]$$

3.4 Programa de cálculo de las fuerzas de filtración

El caso 3*c* es general y cubre los casos 3*a* y 3*b*.

Se presenta el programa general de cálculo de las fuerzas de filtración y los resultados para el caso particular de un valle triangular $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, simétrico con respecto a la vertical, $\alpha = 0$ y de100 m de profundidad.

Los datos de entrada son:

C_v Coeficiente de consolidación del terreno constitutivo del valle en m^2/día. En el caso analizado C_v= 0.01.

*theta*2 Ángulo θ_0 entre las fronteras laterales del valle en radianes (fig 3.6). Debe ser diferente de π. En el ejemplo presentado: $theta2 = \frac{\pi}{2}$.

*theta*3 Ángulo de la bisectriz de la sección triangular del valle con la vertical, en radianes (fig 3.6). En el caso particular presentado: $theta3 = 0$.

*hh*1 Potencial hidráulico inicial *H*, en cualquier punto de la sección transversal del valle, en metros. El valle analizado como ejemplo es tal que $hh1 = 100$.

t Tiempo transcurrido desde el inicio del proceso de consolidación bidimensional del terreno, en días. Se presenta el resultado del caso particular únicamente para $t = 1\,000$ días, aun cuando el programa admite la variación de *t* entre 1 000 y 10 000 días.

Los datos de salida son:

Process time	Tiempo de proceso, en segundos.
t	Tiempo transcurrido desde el inicio del proceso de consolidación bidimensional del terreno, en días.
hh	Distancia vertical del punto considerado al origen de coordenadas polares, en metros (fig 3.6).
L	Distancia horizontal del punto considerado a la frontera $\theta = 0$ del valle, en metros (fig 3.6).
Potencial	Potencial hidráulico φ, en metros.
Fuerza de filtración tangencial	Fuerza de filtración tangencial en coordenadas polares, en ton/m^3.
Fuerza de filtración normal	Fuerza de filtración normal en coordenadas polares, en ton/m^3.

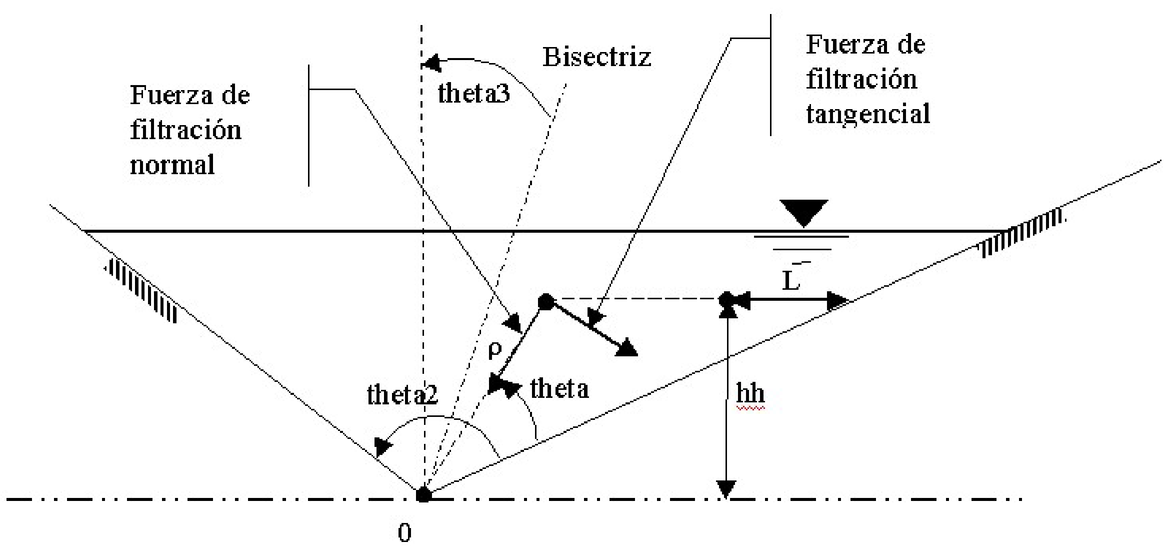


Fig 3.6 Fuerzas de filtración

3.5 Programa general (solución analítica)

```
restart;
st:=time():
pi:=3.14159;
C[v]:=0.01;
theta2:=pi/2:
theta3:=0;
hh1 := 100.:
for t from 1000 by 1000 to 1000 do:
for hh from 10. by 10. to hh1 do:
for theta from 0 by theta2/10 to theta2 do;
rho := hh/cos((theta2/2)+theta3-theta):
L:= hh*(tan((theta2/2)+theta3)-tan((theta2/2)+theta3-theta));
T:= (theta2-theta);
U:= theta;
V:= theta2;
W:= (theta2/2)-theta3;
Z:= (theta2/2)+theta3;
ALP0 := rho/(2*sqrt(C[v]*t));
ALP2 := exp(-(ALP0*sin(T))^2);
ALP4 := exp(-(ALP0*sin(U))^2);
ALP8 := evalf(erfc(ALP0*sin(T)));
ALP10 := evalf(erfc(ALP0*sin(U)));
B2 := sin(U)*ALP8;
B := rho*B2*cos(W)/sin(V);
CC2 := sin(T)*ALP10;
CC:= rho*CC2*cos(Z)/sin(V);
DD:=B+CC;
D2 := ALP2*(2*ALP0/sqrt(pi))*cos(T)*sin(U);
D4 :=-ALP4*(2*ALP0/sqrt(pi))*sin(T)*cos(U);
D8 := cos(U)*ALP8;
D10 :=-cos(T)*ALP10;
DF := ((D2+D8)*cos(W)+(D4+D10)*cos(Z))/(sin(V));
E6 := -ALP2*(2*ALP0/sqrt(pi))*sin(T)*sin(U);
E8 := -ALP4*(2*ALP0/sqrt(pi))*sin(T)*sin(U);
EF:= ((B2+E6)*cos(W)/sin(V))+((CC2+E8)*cos(Z)/sin(V));
suma1:=0;
suma2:=0;
suma3:=0;
for m from 0 by 1 to 500 do;
s := (2*m+1)*pi/theta2;
beta :=(rho^2)/(4*C[v]*t);
```

```
aa:=s/2+1;
bb := s+1;
g1 := GAMMA(0.5*s)*hypergeom([aa],[bb],beta)*exp(-beta)/GAMMA(bb);
g2 := 2*GAMMA(aa)*hypergeom([0.5*s],[bb],beta)*exp(-beta)/GAMMA(bb);
valint:=(beta^(s/2))*g1/2;
valarg1:=sin(s*theta)*valint;
valarg2:=s*cos(s*theta)*valint;
valarg3:=sin(s*theta)*g2*(beta^aa);
suma1:=suma1+valarg1;
suma2:=suma2+valarg2;
suma3:=suma3+valarg3;
end do:
suma1:=((4*hh1/theta2)*suma1)+DD;
suma2:=-(((4*hh1/(theta2*rho))*suma2)+DF);
suma3:=-(((2*hh1/(theta2*rho*beta))*suma3)+EF);
if theta=0 then printf("proc time tiempo     hh          L       ") end if;
if theta=0 then printf("POTENCIAL    FZA_FILT_TAN    FZA_FILT_NOR  \n") end if;
if theta=0 then printf(" (segs)    (dias) \n") end if;
printf("%5.1f%12.1f%8.1f%10.1f%13.4f%16.4f%14.4f \n",evalf(time()-
st),t,hh,evalf(L),evalf(suma1),evalf(suma2),evalf(suma3));
st := time():
end do:
printf("\n");
end do:
end do:
```

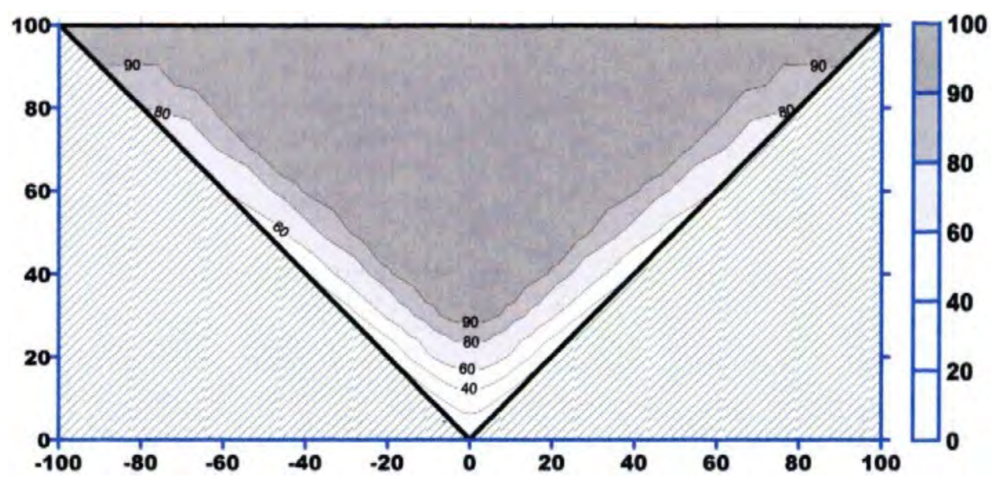


Fig 3.7 Equipotenciales en metros, para t = 5000 días (solución analítica)

La fig 3.7 presenta la distribución de potenciales hidráulicos, para este ejemplo de valle, con una duración del bombeo de 5000 días.

4. ESTADO DE ESFUERZOS Y DEFORMACIONES INDUCIDO POR LAS FUERZAS DE FILTRACIÓN

Los estados de esfuerzos y deformaciones ocasionados por las fuerzas de filtración al prolongarse el bombeo, se estudian mediante el uso del método del elemento finito. En cada uno de los nudos de la malla de elementos y para cada tiempo de bombeo se introducen, como dato, las magnitudes de las fuerzas de filtración correspondientes a las áreas de influencia de cada nudo. Se utiliza el programa de elementos finitos DIRT, imponiendo las siguientes condiciones de frontera y mecánicas:

- las fronteras laterales del valle son rígidas y los desplazamientos son nulos en sus nudos
- el esfuerzo vertical en la superficie libre del valle es nulo
- el material de relleno del valle se comporta como un material elástico lineal, en términos de esfuerzos efectivos, con un módulo de elasticidad $E = 650\,\text{ton/m}^2$ y una relación de Poisson $\nu = 0.3$
- los esfuerzos de tensión se consideran positivos y los de compresión negativos.

En esas condiciones y para duraciones de bombeo de 1000 días, y 5 y 10 años, se obtuvieron las magnitudes de:

a) los desplazamientos inducidos en sentido horizontal X (figs 4.1 a 4.3)

b) los desplazamientos inducidos en sentido vertical Y (figs 4.4 a 4.6)

c) los esfuerzos efectivos normales horizontales X (figs 4.7 a 4.9)

d) los esfuerzos efectivos normales verticales Y (figs 4.10 a 4.12)

e) los esfuerzos cortantes XY (figs 4.13 a 4.15)

f) el esfuerzo principal efectivo S_1 (figs 4.16 a 4.18)

g) el esfuerzo principal efectivo S_2 (figs 4.19 a 4.21)

A cada elemento de la malla se asocia un color correspondiente a la magnitud del desplazamiento o del esfuerzo actuante en el entorno del centro de gravedad del elemento (lo que explica que aun cuando se ha impuesto la condición de cero esfuerzo vertical en la superficie libre del valle, en las figs 4.10 a 4.12, la superficie libre se asocia con un esfuerzo vertical diferente de cero).

Comentarios acerca de los desplazamientos y esfuerzos inducidos.

De acuerdo con los resultados numéricos presentados en las figs 4.1 a 4.21, y considerando los esfuerzos efectivos de tensión como positivos, se observa que:

- los esfuerzos efectivos de tensión máximos, se presentan inicialmente en la parte más profunda del valle y se van difundiendo, conforme transcurre el tiempo, hacia la superficie libre del terreno. Las grietas de tensión superficiales se presentan, por tanto, a largo plazo.
- el esfuerzo efectivo horizontal máximo de tensión $\bar{\sigma}_x$, en la superficie libre del terreno y para cada tiempo de bombeo, se presenta aproximadamente a una distancia de 25 m de ambas fronteras laterales.

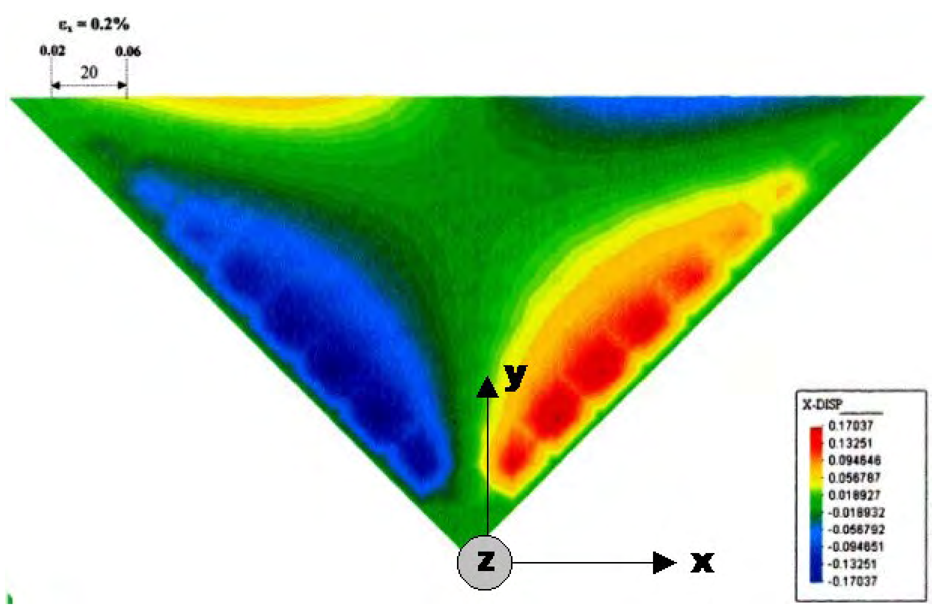


Fig 4.1 Fuerzas de filtración a 1000 días. Desplazamientos en x, *en metros*

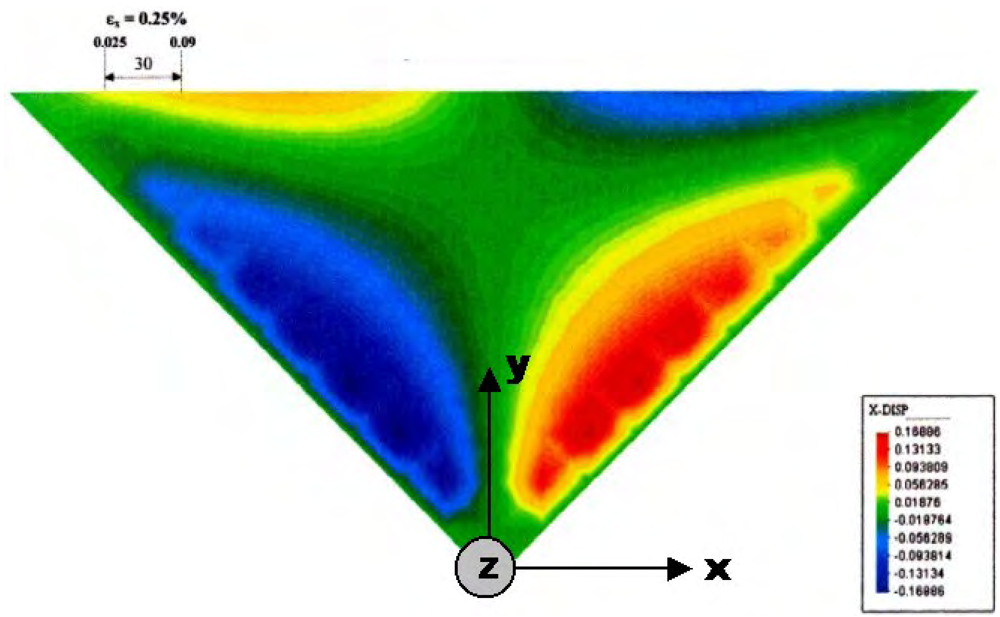


Fig 4.2 Fuerzas de filtración a 5 años. Desplazamientos en x, *en metros*

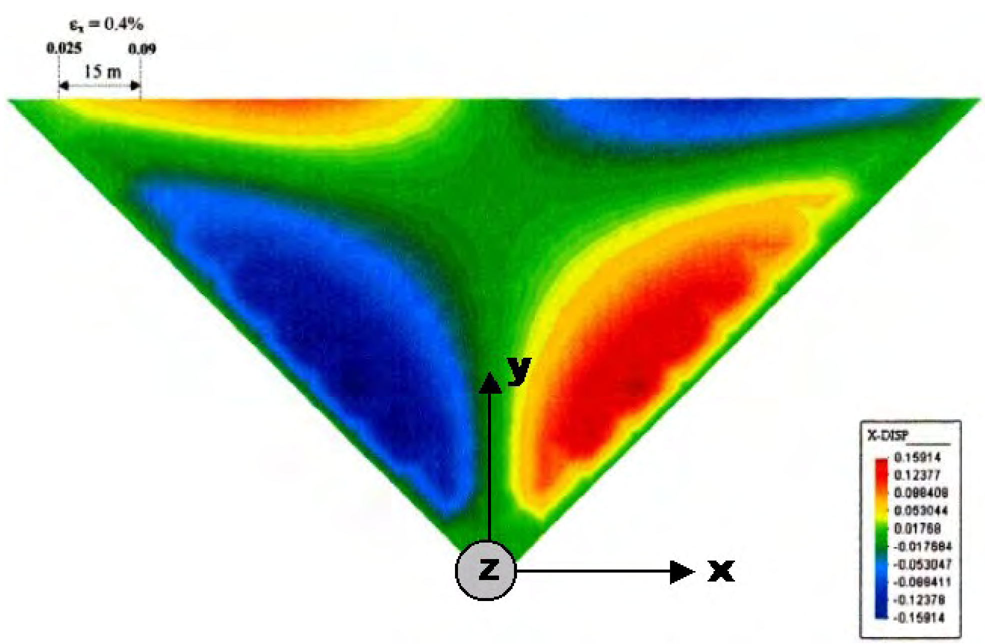


Fig 4.3 Fuerzas de filtración a 10 años. Desplazamiento en x, *en metros*

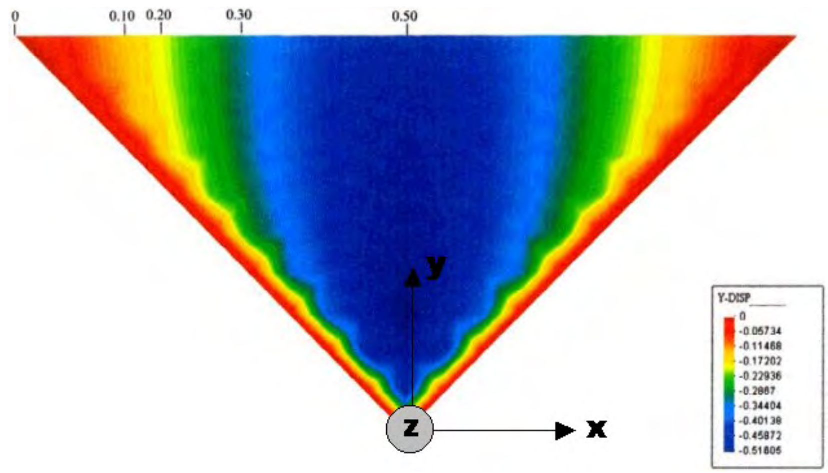


Fig 4.4 Fuerzas de filtración a 1000 días. Desplazamientos en y*, en metros*

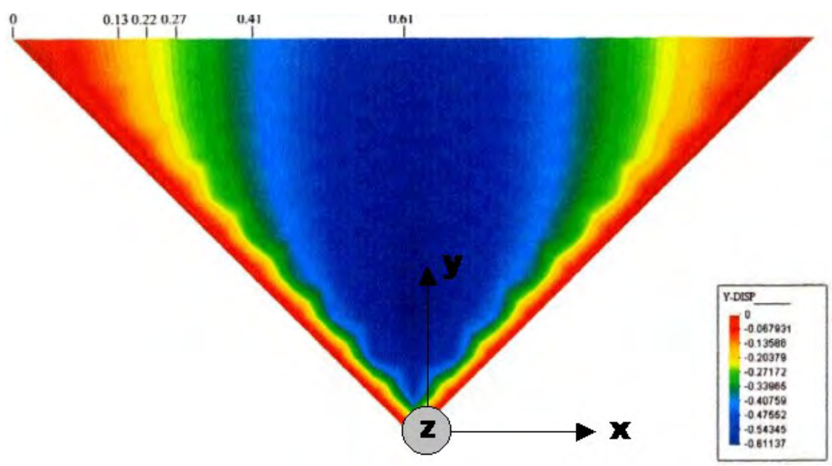


Fig 4.5 Fuerzas de filtración a 5 años. Desplazamientos en y*, en metros*

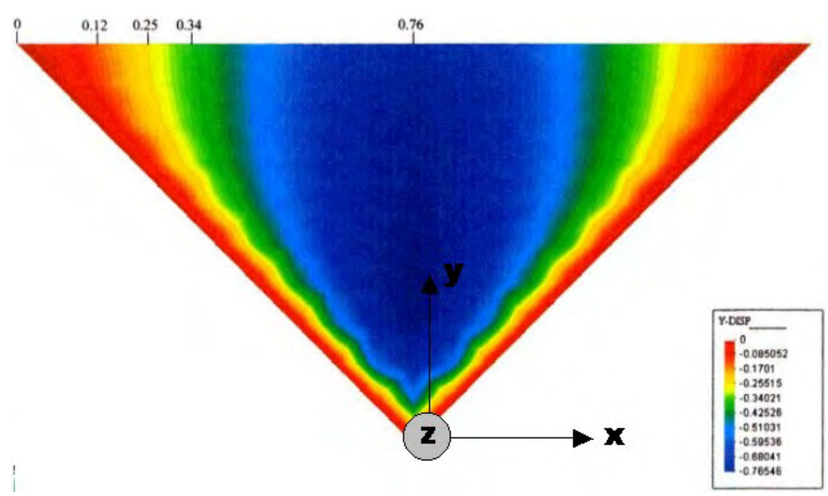


Fig 4.6 Fuerzas de filtración a 10 años. Desplazamientos en y*, en metros*

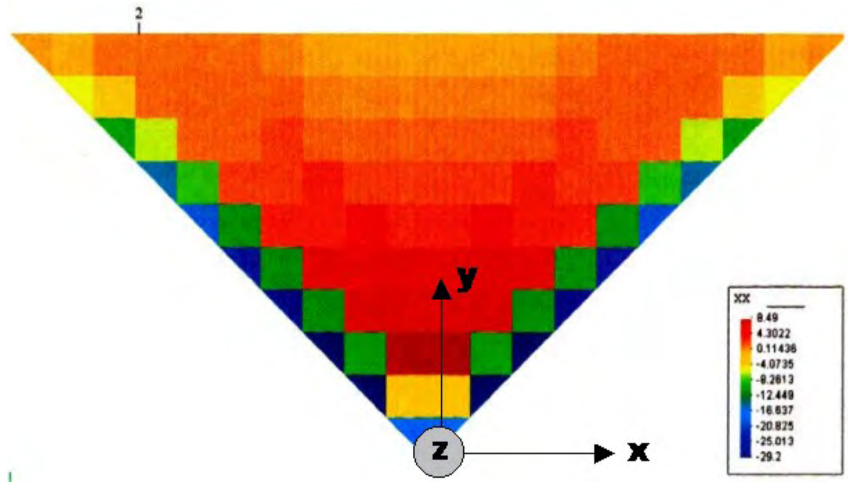


Fig 4.7 Fuerzas de filtración a 1000 días. Esfuerzos en x, *ton/m²*

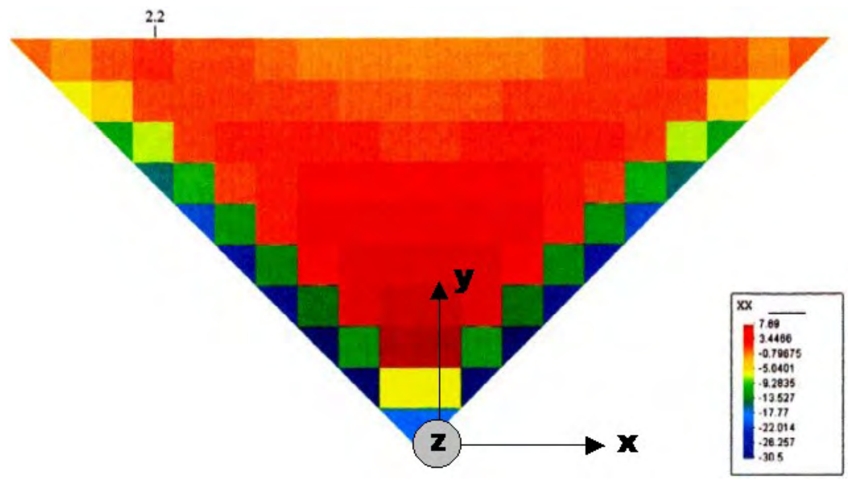


Fig 4.8 Fuerzas de filtración a 5 años. Esfuerzos en x, *en ton/m²*

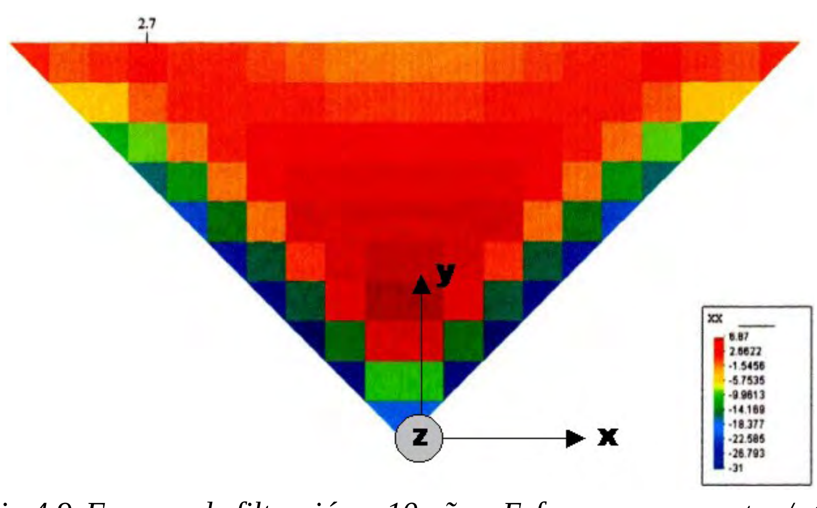


Fig 4.9 Fuerzas de filtración a 10 años. Esfuerzos en x, *en ton/m²*

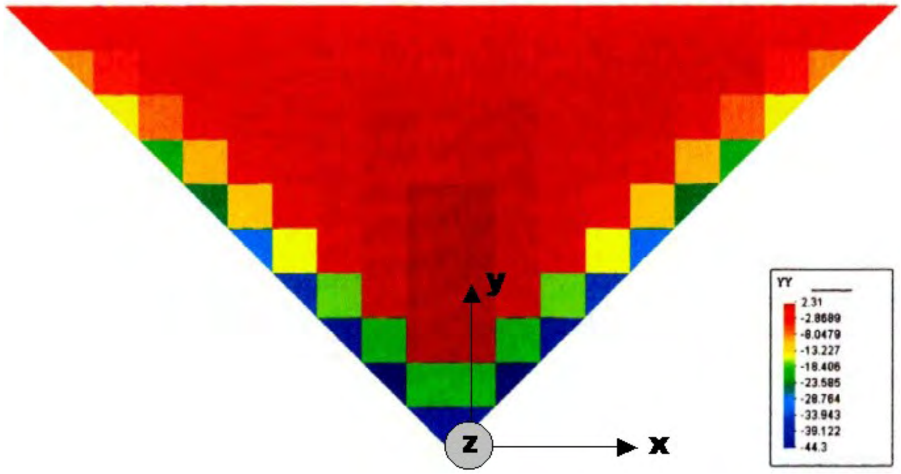


Fig 4.10 Fuerzas de filtración a 1000 días. Esfuerzos en y, ton/m²

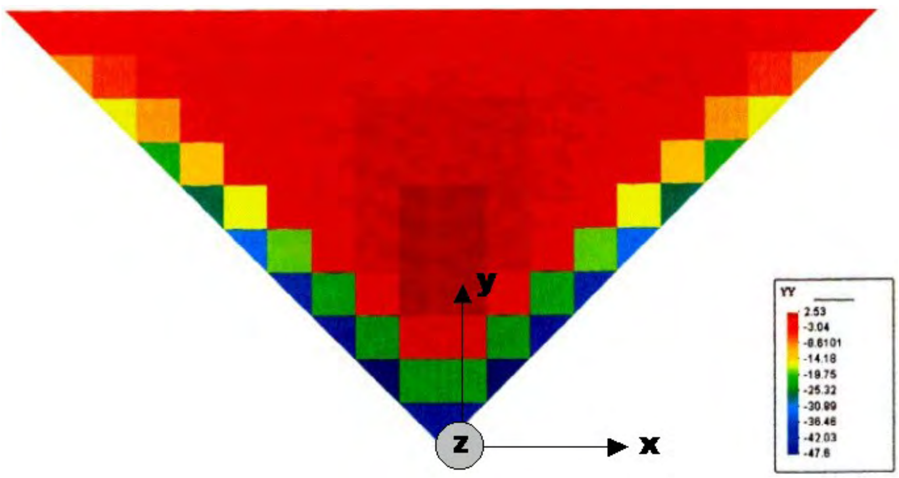


Fig 4.11 Fuerzas de filtración a 5 años. Esfuerzos en y*, en ton/m²*

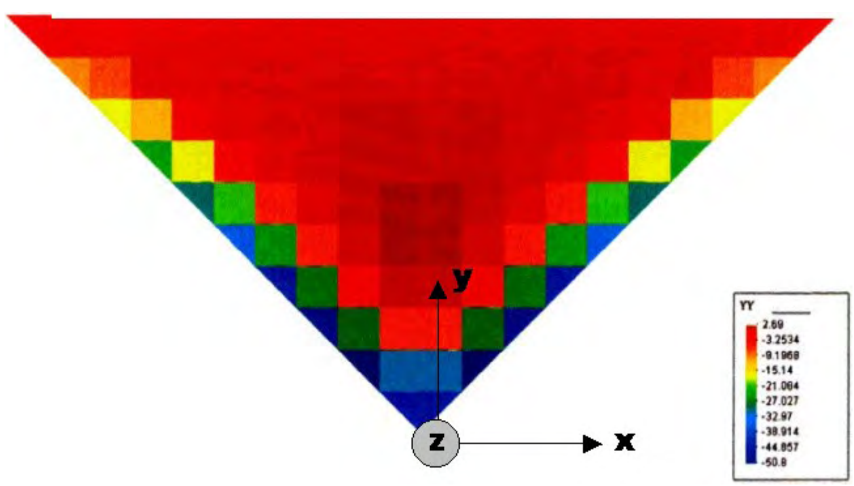


Fig 4.12 Fuerzas de filtración a 10 años. Esfuerzos en y*, en ton/m²*

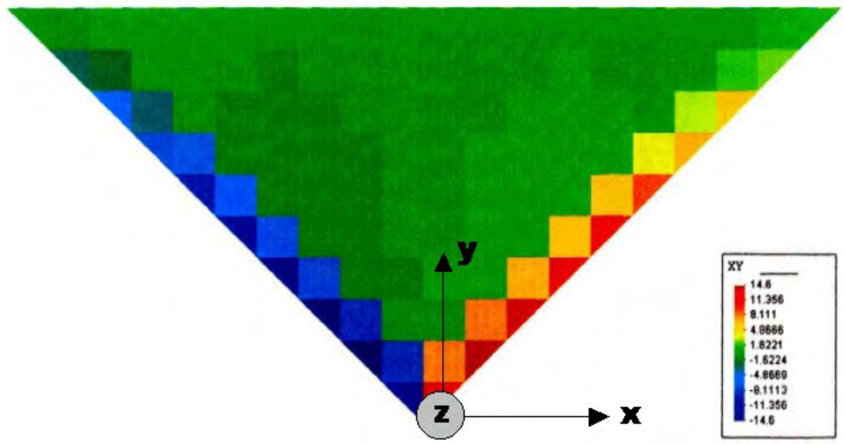


Fig 4.13 Fuerzas de filtración a 1000 días. Esfuerzos en xy, *ton/m*^{2}

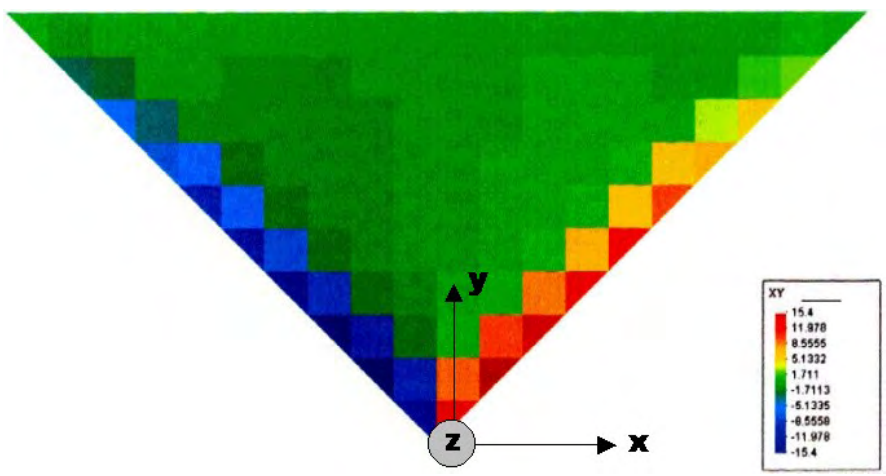


Fig 4.14 Fuerzas de filtración a 5 años. Esfuerzos en xy, *en ton/m*^{2}

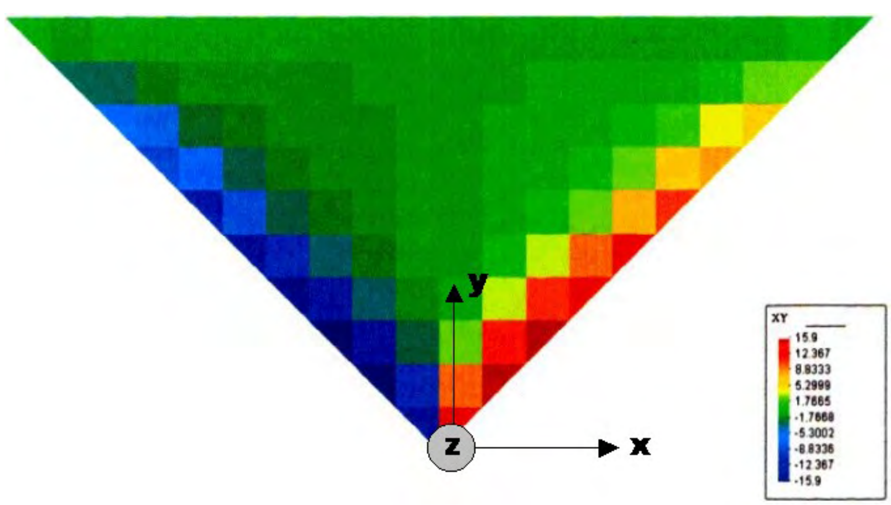


Fig 4.15 Fuerzas de filtración a 10 años. Esfuerzos en xy, *en ton/m*^{2}

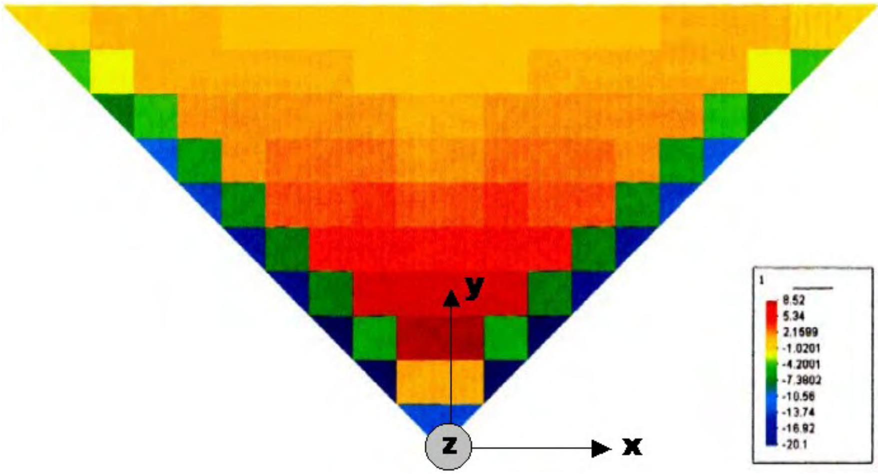


Fig 4.16 Fuerzas de filtración a 1000 días. Esfuerzos principales S_1*, ton/m*^{2}

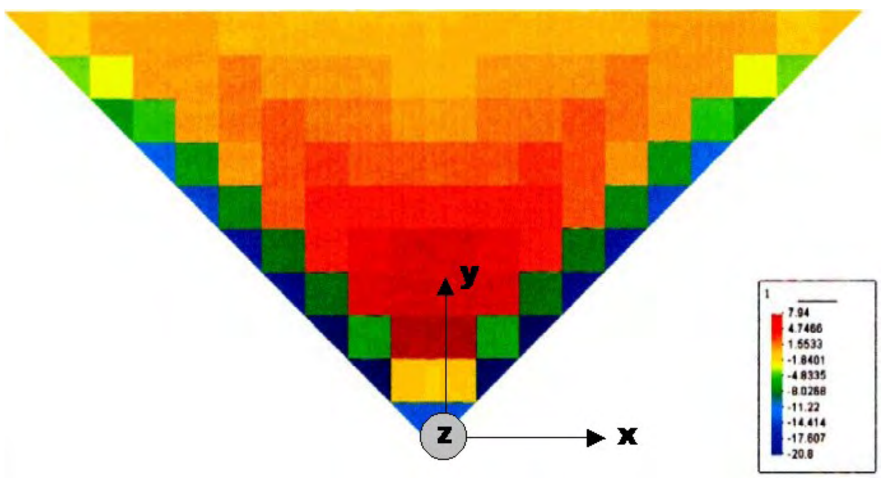


Fig 4.17 Fuerzas de filtración a 5 años. Esfuerzos principales S_1*, en ton/m*^{2}

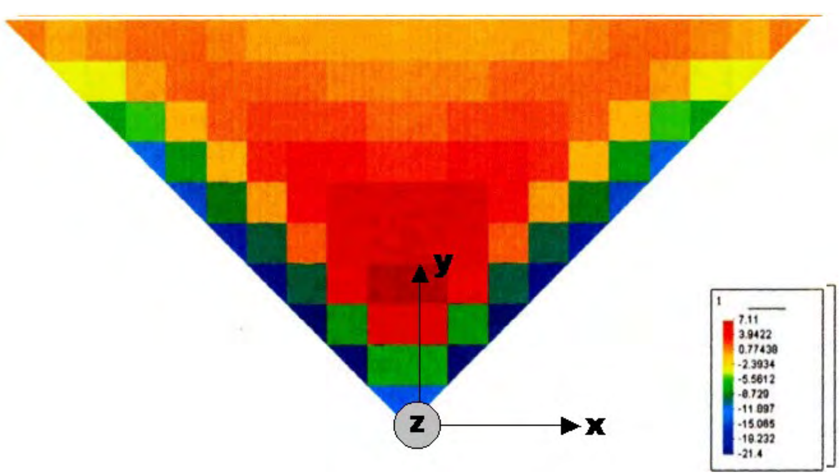


Fig 4.18 Fuerzas de filtración a 10 años. Esfuerzos principales S_1*, en ton/m*^{2}

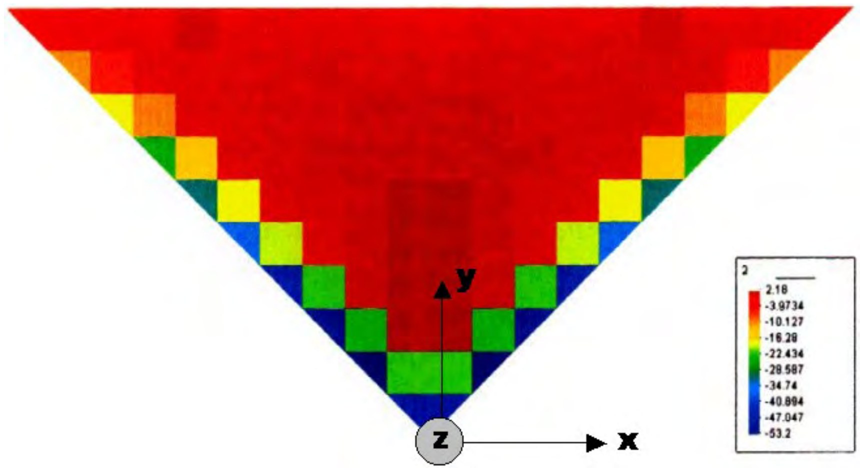


Fig 4.19 Fuerzas de filtración a 1000 días. Esfuerzos principales S_2*, ton/m*^{2}

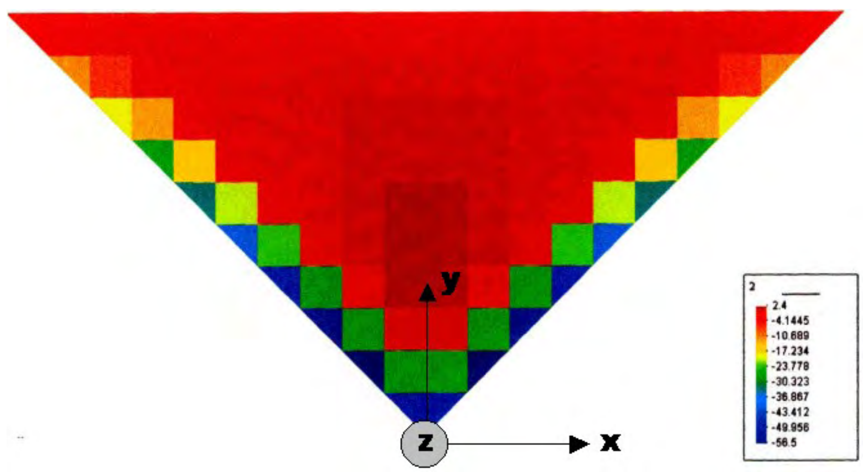


Fig 4.20 Fuerzas de filtración a 5 años. Esfuerzos principales S_2*, en ton/m*^{2}

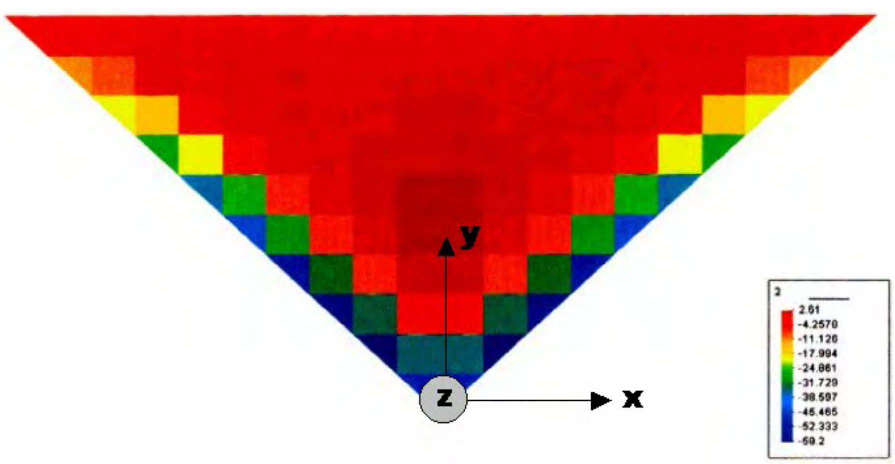


Fig 4.21 Fuerzas de filtración a 10 años. Esfuerzos principales S_2*, en ton/m*^{2}

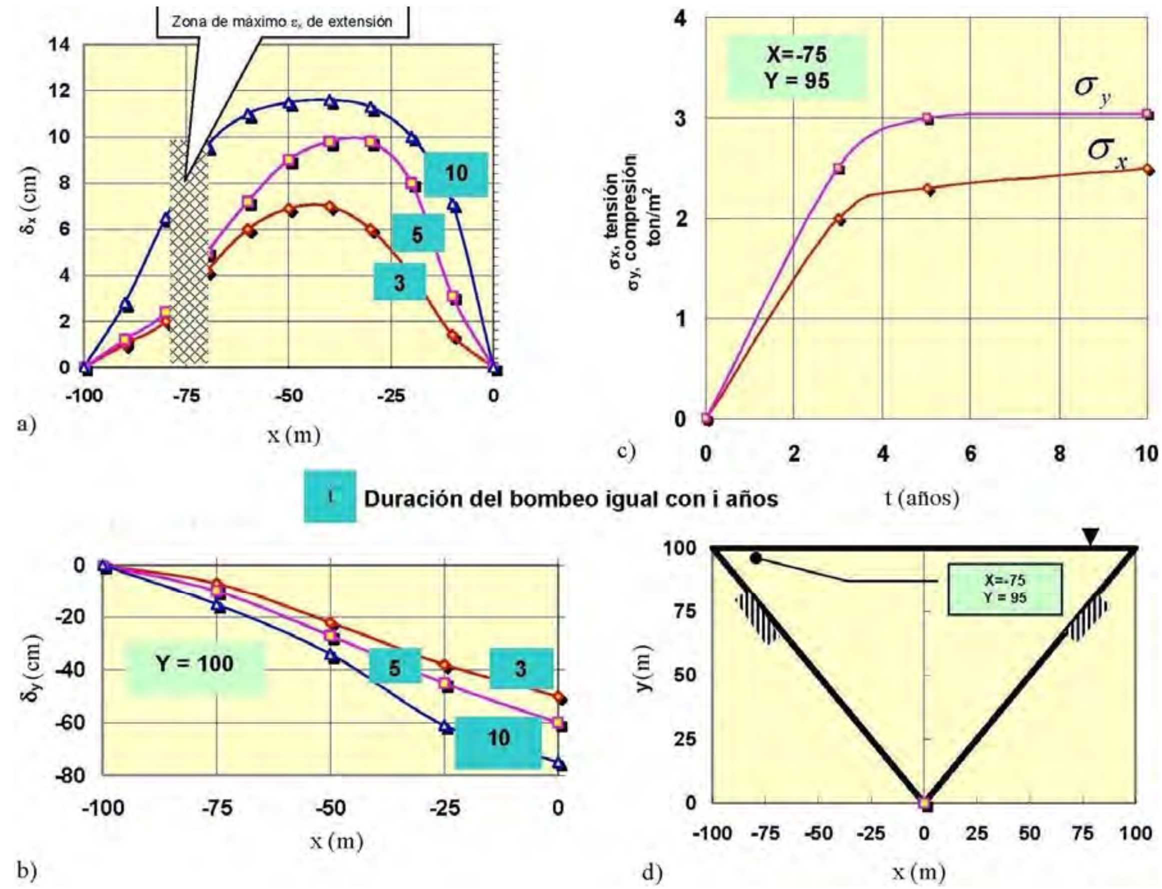


Fig 4.22 a) Variación de los desplazamientos horizontales en la superficie del terreno (cm),
b) Variación de los desplazamientos verticales en la superficie del terreno (cm),
c) Variación de las tensiones σ_x, σ_y *para* x = *-75, y = 95, y d) Geometría y ejes de referencia*

La variación con el tiempo de bombeo de los esfuerzos efectivos de tensión en esta zona se ilustra en la fig 4.22c. Después de cinco años de bombeo $\overline{\sigma}_y$ se estabiliza, mientras que el esfuerzo $\overline{\sigma}_x$ sigue aumentando después de diez años de bombeo.

Así mismo, las figs 4.22a y 4.22b presentan la variación de los desplazamientos horizontales y verticales de los puntos localizados en la superficie libre del terreno. Cabe señalar que en el caso analizado los valores máximos de las deformaciones de extensión horizontal varían con el tiempo de 0.2 a 0.4 %. La grieta se presenta cuando la deformación de extensión máxima alcanza un valor crítico que de acuerdo con el tipo de suelo varía de 0.1 a 0.4 % (ref 13).

Cuando el esfuerzo $\overline{\sigma}_x$ sobrepasa el esfuerzo efectivo de compresión horizontal inicial debido a peso propio, se presenta la grieta de tensión. Al abrirse la grieta de tensión, se eliminan los esfuerzos cortantes prexistentes en ese plano vertical y en la colindancia con la grieta; la cuña triangular de frontera del valle sufre un ligero rebote, mientras la zona central sufre un incremento leve y brusco del asentamiento.

Conforme transcurre el tiempo, la grieta superficial se propaga hacia el interior del macizo. La presencia de la grieta de tensión modifica la red de flujo de agua y en la parte central del valle siguen aumentando los asentamientos por consolidación del espesor total del relleno, mientras en la cuña triangular de frontera la velocidad de asentamiento disminuye notablemente. Se genera así un escalón vertical entre los dos cuerpos separados por la grieta, como se ha observado en la práctica.

Al presentarse la grieta de tensión, se modifica la geometría del problema. La grieta AB constituye junto con el segmento BC de la frontera lateral inicial, la nueva frontera del problema (fig 4.23). En la frontera ABC, el potencial hidráulico corresponde únicamente al potencial de posición. Bajo estas condiciones, es posible que al proseguir el bombeo, se generen grietas en el tramo OA de la superficie libre del terreno y paralelas a la grieta AB. La nueva geometría del problema no permite el uso directo del programa de cómputo presentado. Conviene entonces desarrollar un programa de cálculo numérico, por diferencias finitas, del potencial φ y de las fuerzas de filtración generadas durante el proceso transitorio de consolidación de un valle con geometría de fronteras cualesquiera. Éste permitiría estudiar los casos particulares de valles en los que la roca basal presenta escalones o taludes sepultados, y el flujo de agua, con sus consecuentes fuerzas de filtración, después de la aparición de la grieta perimetral superficial en la cercanía de las fronteras rocosas.

Tal programa se presenta a continuación, junto con la forma de generar los elementos finitos y el significado de los datos de entrada y salida.

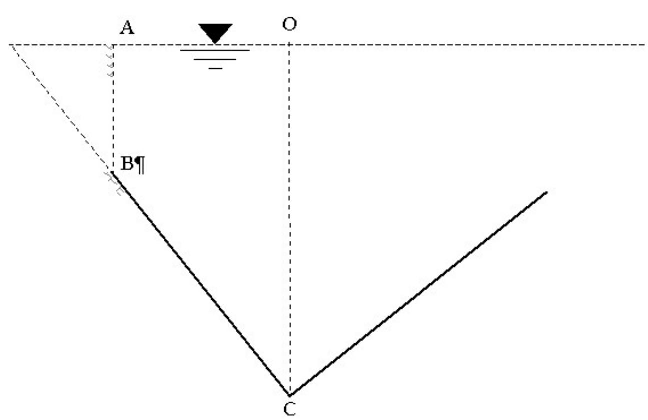


Fig 4.23 Generación de la grieta AB

5. PROGRAMA DE ANÁLISIS NUMÉRICO MEDIANTE DIFERENCIAS FINITAS. INSTRUCTIVO DEL PROGRAMA

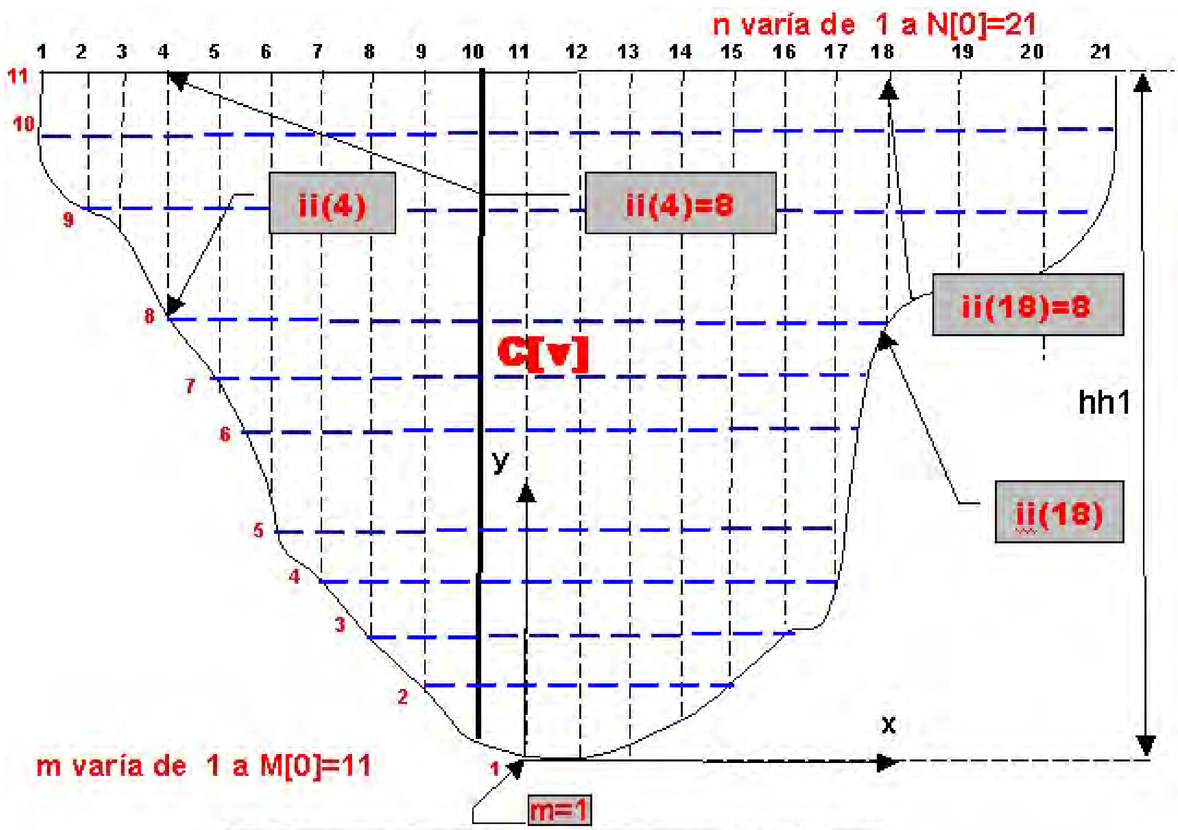


Fig 5.1 Malla para el esquema de diferencias finitas

DATOS (FIG 5.1)

X0	x(1), x(2),…x(21): x(n) con n = 1 a N[0]
Y0	y(1), y(2),…y(11): y(m) con m = 1 a M[0]
TIEMPO	Duración del bombeo, en días
hh1	Espesor de la lámina de agua freática, al inicio del bombeo, en metros
tau	Intervalo de tiempo Δt considerado en el esquema de diferencias finitas, días
C[v]	Coeficiente $\frac{k}{m_v \gamma_w}$, en m^2/día
N[0]	Número de verticales en la red de elementos discretos
M[0]	Número de horizontales en la red de elementos discretos
tf	Duración del bombeo, desde su inicio hasta la generación de la grieta vertical, en días
M[1]	Valor de *m,* de la recta horizontal de la red que pasa por el punto de intersección de la grieta vertical con las fronteras rocosas
N[1]	Valor de *n* correspondiente a la vertical de la red que se transforma en grieta
ii(n)	Valor de *m* correspondiente al punto de intersección de las rectas verticales *n* con la base permeable del macizo sometido a bombeo.

RESULTADOS

Listado de: *[n, m, x(n,m),* y *(n,m), phi(n,m)]* al inicio del bombeo

Listado de: *[n, m, x(n,m),* y*(n,m), phi(n,m),* F_x*(n,m),* F_y*(n,m)]* después de una duración del bombeo igual a TIEMPO.

Siendo

Phi(n,m)	el potencial hidráulico en el punto de coordenadas *[x(n,m),y (n,m)]*, en m
F_x(n,m)	el componente según *x*, de la fuerza de filtración en el punto de coordenadas *[x(n,m),y(n,m)]*, en ton/m^3
F_y(n,m)	el componente según *y*, de la fuerza de filtración en el punto de coordenadas *[x(n,m),* y *(n,m)]*, en ton/m^3.

Discretización del valle

1. Se trazan $M[0]$ rectas horizontales para cubrir la totalidad del valle, numeradas de 1 a $M[0]$, a partir del origen del sistema de coordenadas

2. Se trazan N [0] rectas verticales a partir de los puntos de intersección de las fronteras del valle con las $M[0]$ rectas horizontales. Estas rectas se numeran de 1 a $N[0]$, partiendo del extremo izquierdo de la superficie libre del valle.

3. Se construyen los arreglos $x0$(n) y $y0$(m), que definen respectivamente, y en el sistema de coordenadas *(x, y),* las ecuaciones de las $N[0]$ rectas verticales y $M[0]$ rectas horizontales anteriormente mencionadas.

4. El punto *(n, m)* corresponde a la intersección de la recta vertical *n*, con la recta horizontal *m* y sus coordenadas son $x(n, m)$ y $y(n,m)$.

Condiciones iniciales

El potencial hidráulico al inicio del proceso, para los puntos internos del valle, es:

$$\varphi(x,y) = hh1$$

y, para los puntos localizados en la base permeable del valle:

$$\varphi(x,y) = y$$

5.1 Programa de diferencias finitas. Agrietamiento en la frontera de un valle

```
restart;
for j from 1 to 5 do:
 if j = 1 then testfile[1,j] :="c:ALB18FEB04_T5000_DIF_FIN_EQUIP.DAT" end if;
 if j = 1 then testfile[2,j] :="c:ALB18FEB04_DIF_FIN_FRONT.DAT" end if;
 if j = 1 then testfile[3,j] :="c:ALB18FEB04_T5000_DIF_FIN_FZAS.DAT" end if;
 if j = 2 then testfile[1,j] :="c:ALB18FEB04_T10000_DIF_FIN_EQUIP.DAT" end if;
 if j = 2 then testfile[3,j] :="c:ALB18FEB04_T10000_DIF_FIN_FZAS.DAT" end if;
 if j = 3 then testfile[1,j] :="c:ALB18FEB04_T15000_DIF_FIN_EQUIP.DAT" end if;
 if j = 3 then testfile[3,j] :="c:ALB18FEB04_T15000_DIF_FIN_FZAS.DAT" end if;
 if j = 4 then testfile[1,j] :="c:ALB18FEB04_T20000_DIF_FIN_EQUIP.DAT" end if;
 if j = 4 then testfile[3,j] :="c:ALB18FEB04_T20000_DIF_FIN_FZAS.DAT" end if;
 if j = 5 then testfile[1,j] :="c:ALB18FEB04_T20000_DIF_FIN_EQUIP.DAT" end if;
 if j = 5 then testfile[3,j] :="c:ALB18FEB04_T25000_DIF_FIN_FZAS.DAT" end if;
 end do:
 pi:=3.14159;
 TIEMPO := [100,5000,10000,15000,20000,25000];
 tau   := 10;
 x0:=[-4750,-3990,-3610,-3468,-3430,-3392,-3278,-3202,-3088,-3040,-2974,-2868,-2760,-
2494,-2166,-1140,0,646,1140,1472,1710,2204,2850]:
```

```
y0:=[0,1.5,2.5,4,5,10.5,17,18.5,20,26,28.5,30,35,40,45,50,55,60,65,70]:
N[0]  := 23;
M[0]  := 20;
hh1 := 70;
C[v]  :=0.01;
ii :=[7,8,9,10,11,12,11,10,9,8,7,6,5,4,3,2,1,2,3,4,5,6,7]:
tf := 25000;
N[1]:=6;
M[1]:=11;
for n from 1 to N[0] do:
for m from ii[n] to M[0] do:
x[n,m] :=  x0[n]:
y[n,m] :=  y0[m]:
phi[n,m] := hh1:
if m = 10 then phi[n,m] := hh1-0.22 end if:
if m = 14 then phi[n,m] := hh1-0.22 end if:
end do:
end do:
for n from 1 to N[0] do:
phi[n,ii[n]]:= hh1-0.22:
end do:
printf("\n\n");
for j from 1 to 5 do:
fd1 :=fopen(testfile[1,j],WRITE):
if j = 1 then fd2 :=fopen(testfile[2,j],WRITE) end if:
fd3 :=fopen(testfile[3,j],WRITE):
TT1 := TIEMPO[j];
TT2 := TIEMPO[j+1];
for t from TT1 by tau to TT2 do:
if t >= 11000 then s := 0.004 else s := 0.0022 end if;
for n from 2 to N[0]-1 do:
ij:=ii[n]+1;
for m from ij to M[0]-1 do:
A[1] := (phi[n+1,m]-phi[n,m])/(x[n+1,m]-x[n,m]);
A[1] := A[1]-(phi[n,m]-phi[n-1,m])/(x[n,m]-x[n-1,m]);
A[1] := A[1]*(2/(x[n+1,m]-x[n-1,m]));
A[2] := (phi[n,m+1]-phi[n,m])/(y[n,m+1]-y[n,m]);
A[2] := A[2]-(phi[n,m]-phi[n,m-1])/(y[n,m]-y[n,m-1]);
A[2] := A[2]*(2/(y[n,m+1]-y[n,m-1]));
phip[n,m]:=phi[n,m]+tau*C[v]*(A[1]+A[2]):
end do:
end do:
for m from ii[1]+1 to M[0]-1 do:
A[2] := (phi[1,m+1]-phi[1,m])/(y[1,m+1]-y[1,m]);
A[2] := A[2]-(phi[1,m]-phi[1,m-1])/(y[1,m]-y[1,m-1]);
A[2] := A[2]*(2/(y[1,m+1]-y[1,m-1]));
```

```
phip[1,m]:=phi[1,m]+tau*C[v]*A[2]:
end do:
for m from ii[N[0]]+1 to M[0]-1 do:
A[2] := (phi[N[0],m+1]-phi[N[0],m])/(y[N[0],m+1]-y[N[0],m]);
A[2] := A[2]-(phi[N[0],m]-phi[N[0],m-1])/(y[N[0],m]-y[N[0],m-1]);
A[2] := A[2]*(2/(y[N[0],m+1]-y[N[0],m-1]));
phip[N[0],m]:=phi[N[0],m]+tau*C[v]*A[2]:
end do:
for n from 1 to N[0] do:
phip[n,ii[n]]    := hh1-s*t;
if phip[n,ii[n]] <= y0[ii[n]] then phip[n,ii[n]] := y0[ii[n]] end if:
phip[n,M[0]] := hh1;
end do:
if t >= tf then r:=M[1] else r:=M[0] end if;
for m from r to M[0] do:
phip[N[1],m] := y0[m];
end do;
for n from 1     to N[0] do:
for m from ii[n] to M[0] do:
if phip[n,m] <= y0[m] then phip[n,m] := y0[m] end if:
phi[n,m] := phip[n,m];
if m = 10 then phi[n,m] := hh1-s*t end if:
if phi[n,m] <= y0[m] then phi[n,m] := y0[m] end if:
if m = 14 then phi[n,m] := hh1-s*t end if:
if phi[n,m] <= y0[m] then phi[n,m] := y0[m] end if:
end do:
end do:
end do:
for n from 2 to N[0]-1 do:
if (ii[n] >= ii[n+1])   then r := n+1 else r := n-1 end if;
if (ii[n+1] = ii[n-1])  then r :=  n  end if;
if (r=n) then Fx[r,ii[r]] := 0 else Fx[n,ii[n]]:=-(phi[r,ii[n]]-phi[n,ii[n]])/(x[r,ii[n]]-x[n,ii[n]])
end If;
Fy[n,ii[n]]:=-(phi[n,ii[n]+1]-phi[n,ii[n]])/(y[n,ii[n]+1]-y[n,ii[n]]):
ij := ii[n]+1:
for m from ij to M[0]-1 do:
Fx[n,m]:= (phi[n+1,m]-phi[n,m])/(x[n+1,m]-x[n,m]):
Fx[n,m]:= (-1/2)*(Fx[n,m]+(phi[n,m]-phi[n-1,m])/(x[n,m]-x[n-1,m])):
Fy[n,m]:= (phi[n,m+1]-phi[n,m])/(y[n,m+1]-y[n,m]):
Fy[n,m]:= (-1/2)*(Fy[n,m]+(phi[n,m]-phi[n,m-1])/(y[n,m]-y[n,m-1])):
end do:
end do:
for m from ii[1] to M[0]-1 do:
Fx[1,m]:=0:
Fy[1,m]:=-(phi[1,m+1]-phi[1,m])/(y[1,m+1]-y[1,m]):
end do:
```

```
 for m from ii[N[0]] to M[0]-1 do:
 Fx[N[0],m]:=0:
 Fy[N[0],m]:=-(phi[N[0],m+1]-phi[N[0],m])/(y[N[0],m+1]-y[N[0],m]):
 end do:
 for n from 1 to N[0] do:
 Fx[n,M[0]]:=0:
 Fy[n,M[0]]:=0:
 end do:
 printf("TIEMPO  = %10.3f DIAS\n\n",TT2);
 for n from 1 to N[0] do;
 for m from ii[n] to M[0] do;
printf("%5.0f%5.0f%10.3f%10.3f%10.3f%10.3f%10.3f\n",n,m,x[n,m],y[n,m],phi[n,m],Fx[
n,m],Fy[n,m]);
fprintf(fd1,"%10.3f%10.3f%10.3f\n",x[n,m],y[n,m],phi[n,m]);
fprintf(fd3,"%5.0f%5.0f%10.3f%10.3f%10.3f%10.3f\n",n,m,x[n,m],y[n,m],Fx[n,m],Fy[n,m
]);
if m = ii[n] and j = 1 then fprintf(fd2,"%10.3f%10.3f%10.3f\n",x[n,m],y[n,m],phi[n,m]) end
if;
end do;
end do;
fclose(fd1):
if j = 1 then fclose(fd2) end if:
fclose(fd3):
end do:
```

La validez de este programa se estableció comparando sus resultados numéricos con los resultados analíticos resultantes del programa presentado en el inciso 3.5 para el caso de un valle triangular recto y simétrico respecto a la vertical (fig 3.1a).

6. AGRIETAMIENTO EN LA FOSA DE CELAYA

A raíz del bombeo de agua iniciado en los años 40 del pasado siglo en la fosa de Celaya, se presentó en 1960 (ref 2) una grieta en la cercanía de su hombro poniente. La fosa está constituida por un substrato basáltico y un relleno lacustre de 250 m de espesor en el centro del valle y de 35 m en su extremo poniente (fig 6.1). Para calcular la evolución de los potenciales hidráulicos y de las fuerzas de filtración, conforme al tiempo transcurrido desde el inicio del bombeo:

a) Se divide el subsuelo del valle en elementos conforme a la malla presentada en la fig 6.1.

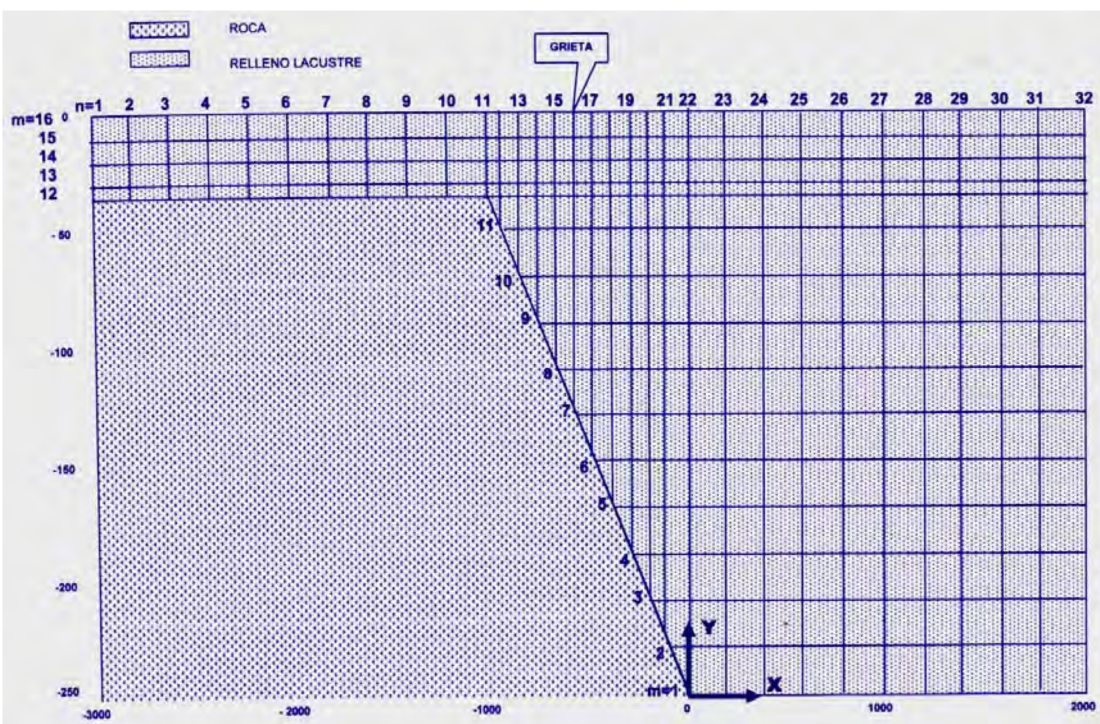


Fig 6.1 Estratigrafía y malla de elementos, fosa Celaya

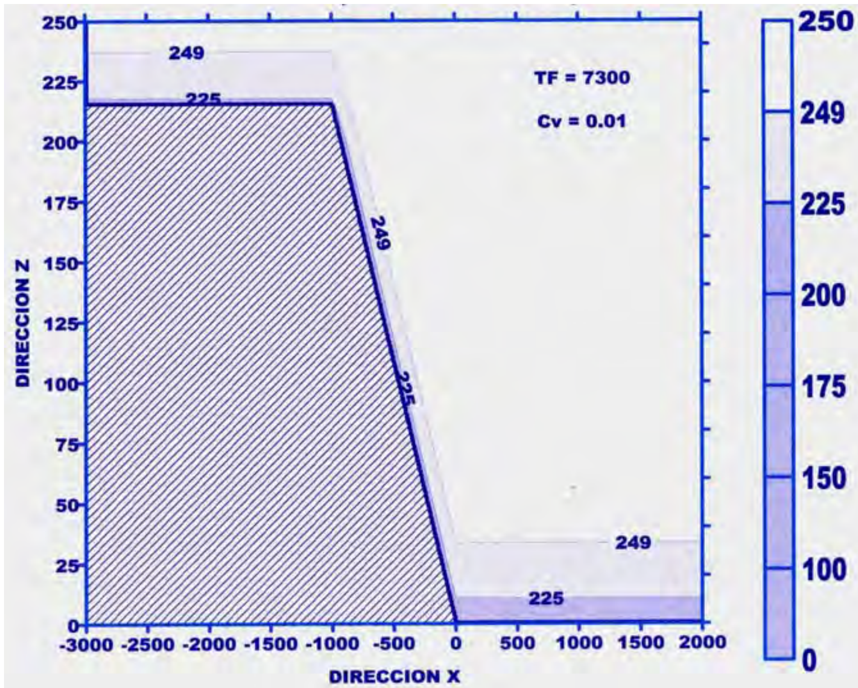


Fig 6.2 Equipotenciales en metros, fosa Celaya (T = 5 000 *días)*

b) Se estima que tomando en cuenta que los niveles estáticos en los pozos de bombeo registrados en 1989 (ref 2) se localizan a 180 m por debajo de la superficie del terreno, la perdida de presión diaria es de 1 cm de 1940 a 1990, en las formaciones basálticas. Esta pérdida de presión en los basaltos no se refleja íntegra e instantáneamente en los potenciales hidráulicos del relleno. Física y analíticamente se ha podido comprobar en el caso del bombeo en el valle de México que, para tiempos de bombeo inferiores de cien años, es válido en primera aproximación considerar que el nivel freático en los rellenos permanece en la superficie libre del terreno.

En esas condiciones, las equipotenciales después de 5 000 días de bombeo son las presentadas en la fig 6.2. Los correspondientes esfuerzos efectivos principales de tensión ocasionados por las fuerzas de filtración actuantes en un medio elástico ($E = 400$ ton/m^2, $v = 0.3$) se presentan en la fig 6.3.

En la fig 6.4, se presentan las equipotenciales correspondientes a un bombeo de 10 000 días de duración suponiendo que se abrió una grieta vertical de tensión, tal como se señala en la fig 4.23, a los 20 años de inicio del bombeo, y en la fig 6.5, los correspondientes esfuerzos principales. Se aprecia una notoria zona de tensión, en la zona localizada debajo de la grieta, como lo señalaron Jachens y Holzer (ref 13) mediante campañas de reconocimiento geofísico.

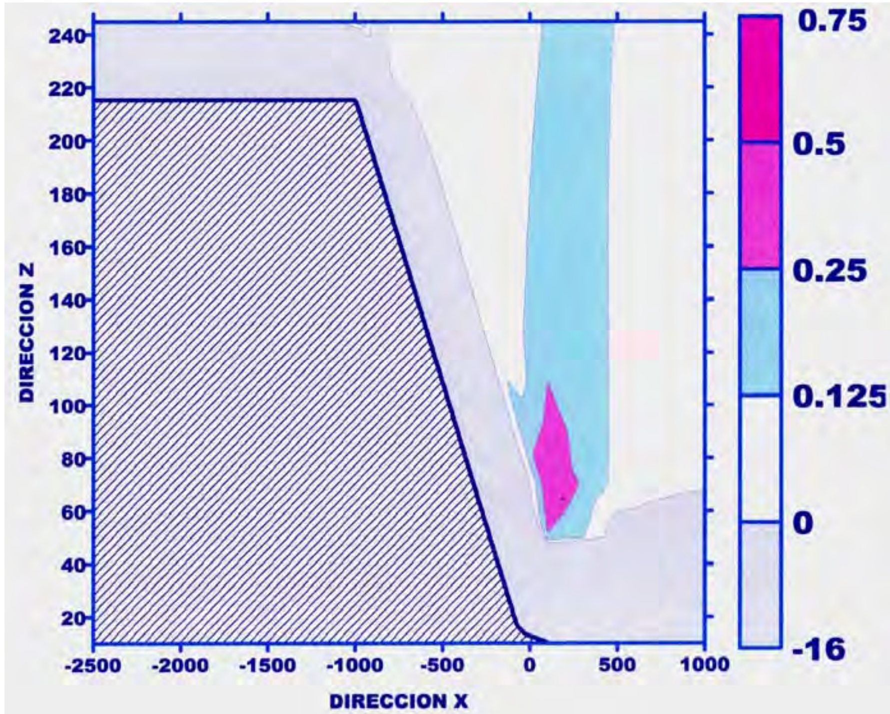


Fig 6.3 Fosa Celaya, esfuerzos principales S_1 *en ton/m²* (T = *5000 días)*

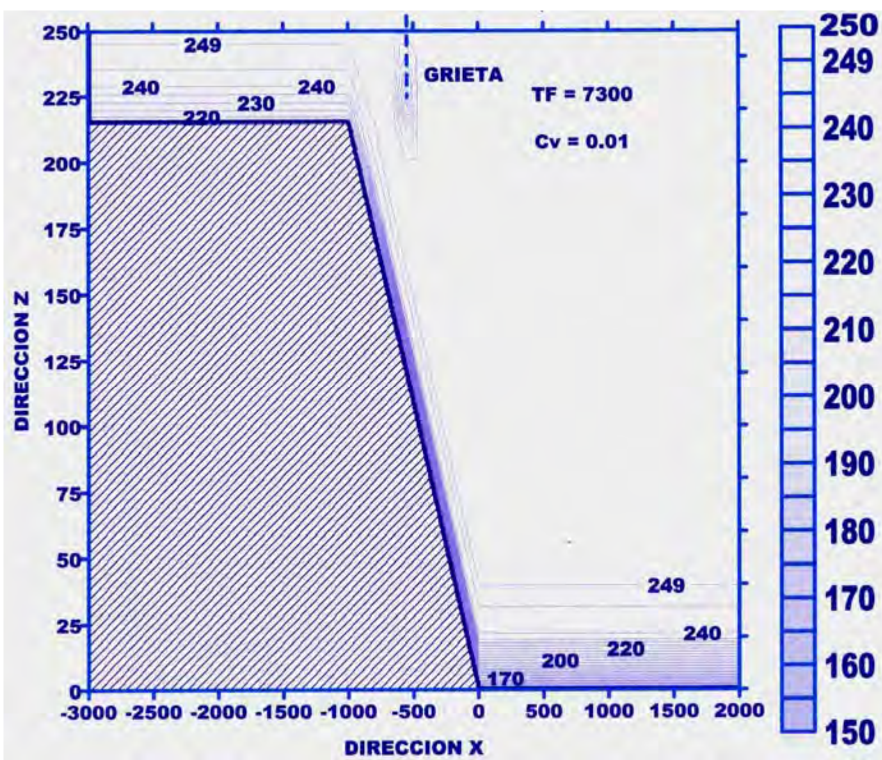


Fig 6.4 Fosa Celaya, equipotenciales en metros (T = *10000 días)*

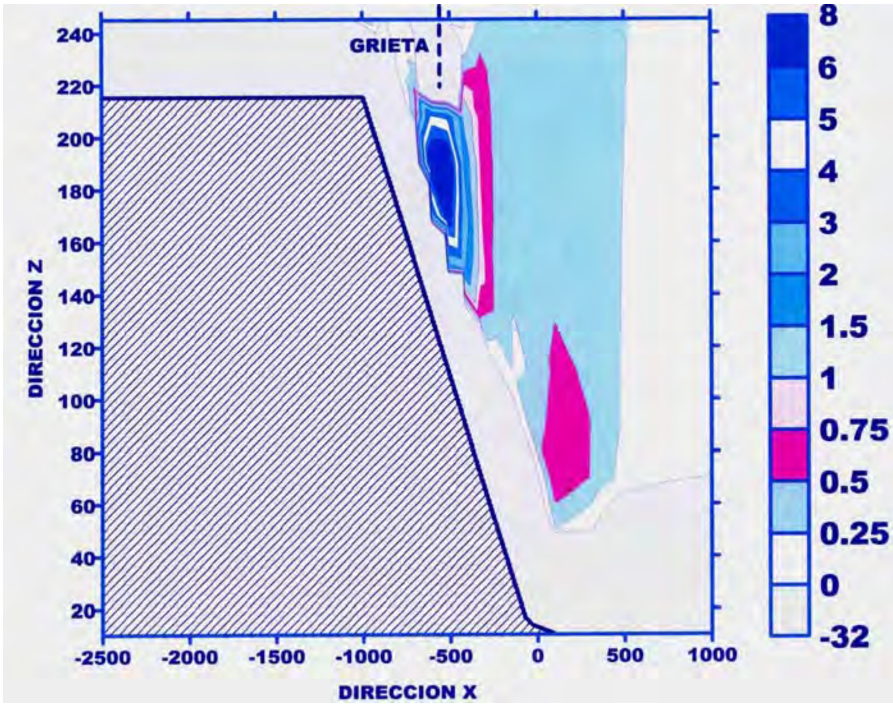


Fig 6.5 Fosa Celaya, esfuerzos principales S_1 *en ton/m*^{2} (T = *10 000 días)*

Se supuso que el potencial hidráulico en las paredes de la grieta y en todo momento posterior a su aparición es el potencial de posición, ya que el caudal de agua que penetra en la grieta se elimina por evaporación. En esas condiciones los asentamientos en superficie evolucionan como se muestra en la fig 6.6. Cabe señalar que al presentarse la grieta, la velocidad de asentamiento en su cercanía se reduce momentáneamente, como se puede apreciar en la curva correspondiente a los 10000 días de bombeo (fig 6.6). Este fenómeno está relacionado con los esfuerzos horizontales de compresión que genera el flujo de agua hacia la grieta abierta. Al transcurrir el tiempo, la intensidad de este efecto disminuye.

Al introducir la grieta en el programa de elemento finito DIRT, no se consideró que la grieta constituyera una discontinuidad en esfuerzos y desplazamientos, por lo que no se puede esperar la presencia de un escalón entre los labios de la grieta que hoy en día, después de 20 000 días de bombeo, alcanza un valor de 1.2 m en la llamada falla poniente de la fosa de Celaya. Sin embargo, el asentamiento diferencial entre los nudos localizados en la superficie y a ambos lados de la grieta resulta de acuerdo con los cálculos efectuados de 1.25 m (fig 6.6). Además, la velocidad de asentamientos máximos medida en la fosa Celaya es hoy en día de 15 cm/año y coincide adecuadamente con los resultados de los cálculos (fig 6.6).

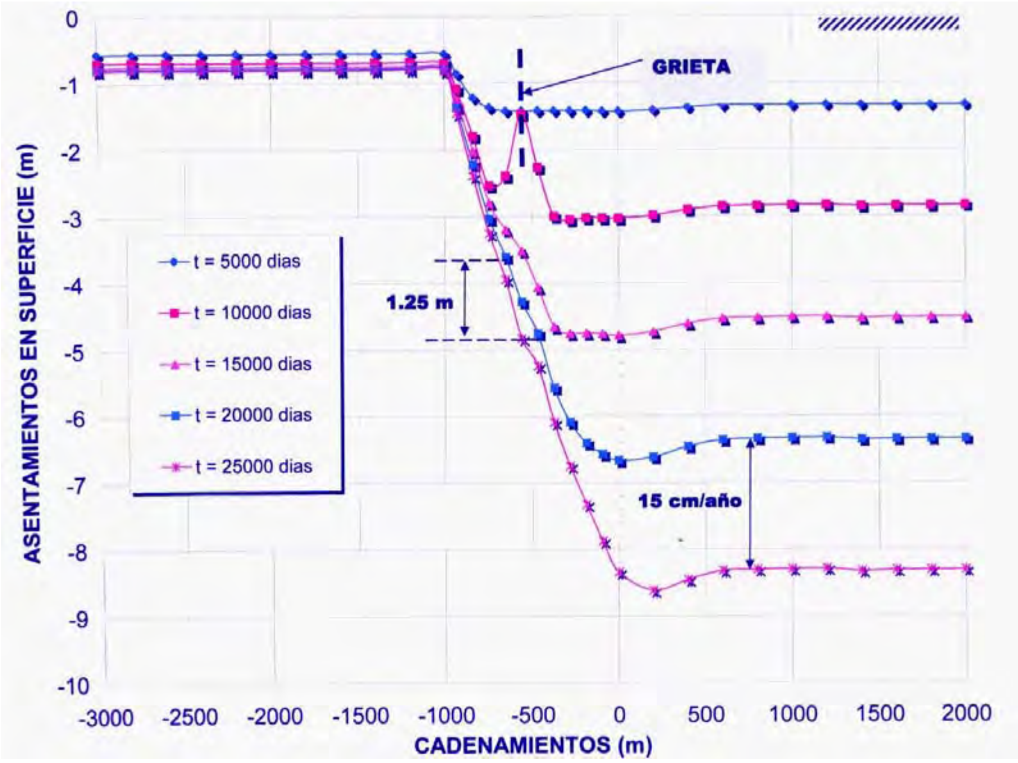


Fig 6.6 Fosa Celaya. Asentamientos en superficie

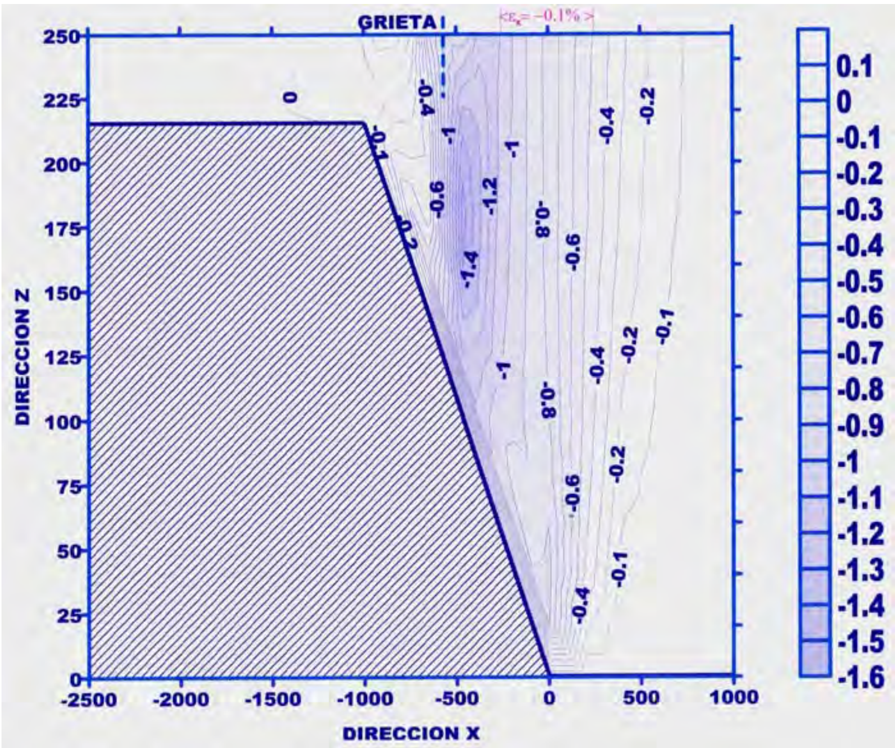


Fig 6.7 Desplazamientos en metros (dirección x), fosa Celaya (T = *10 000 días)*

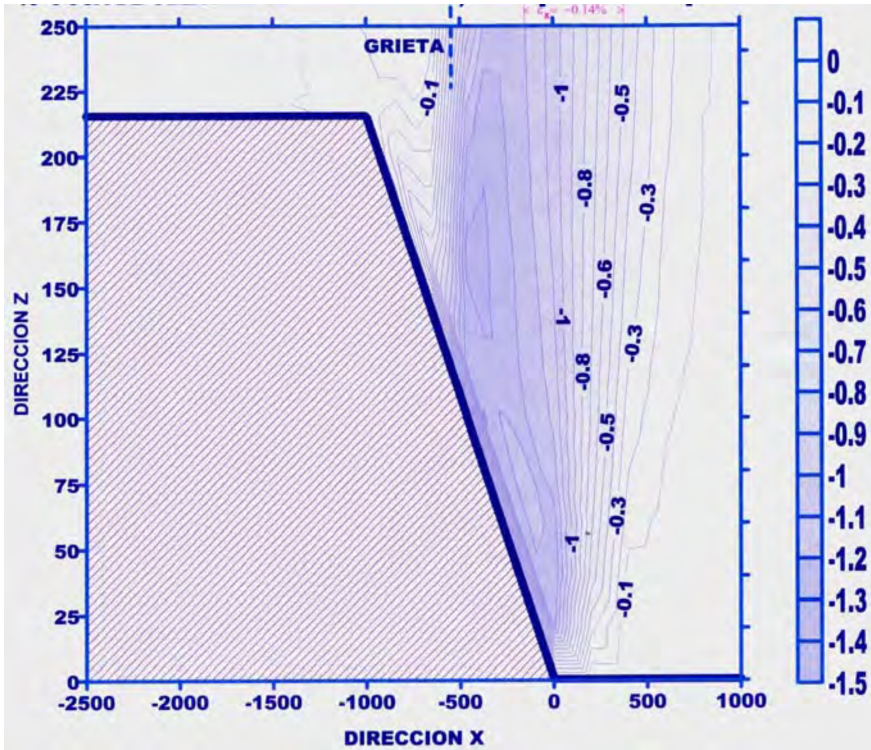


Fig 6.8 Desplazamientos, en metros, dirección x*, fosa Celaya,* (T *= 15000 días)*

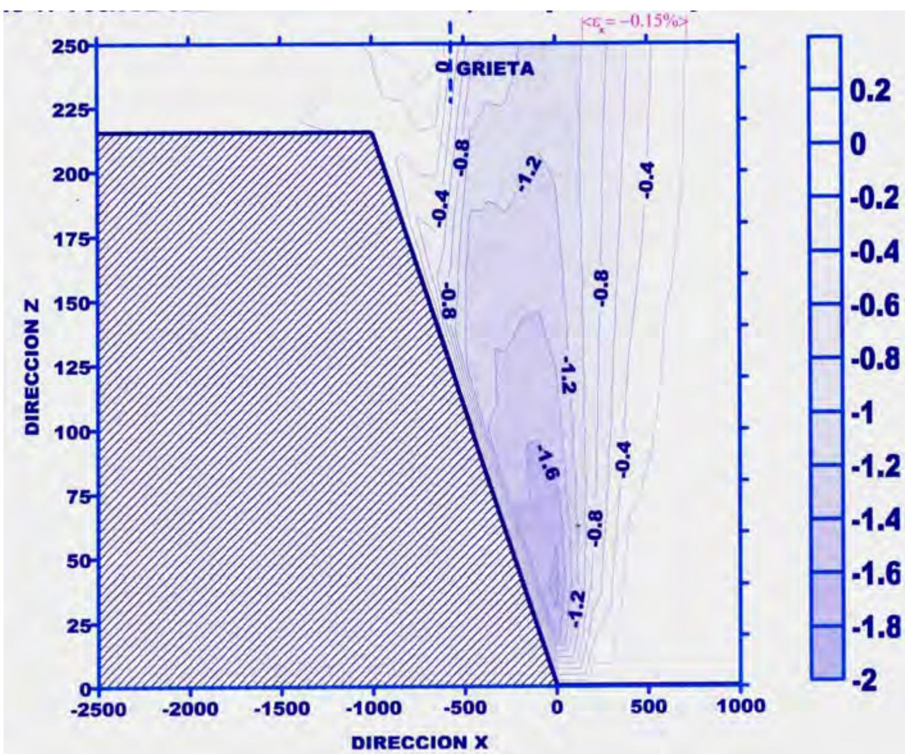


Fig 6.9 Desplazamientos en metros dirección x, fosa Celaya (T *= 20000 días)*

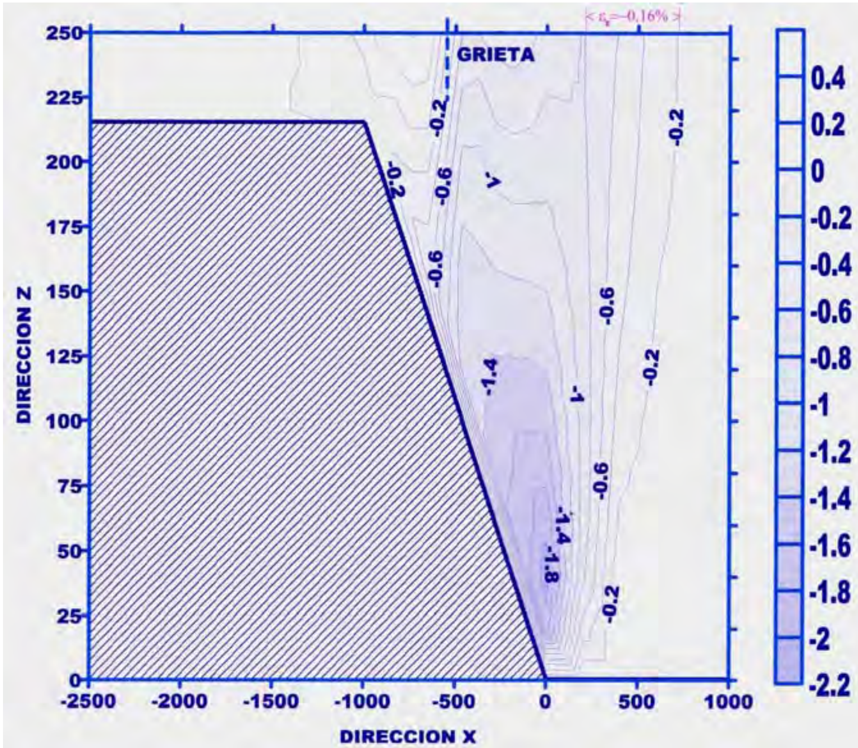


Fig 6.10 Desplazamientos en metros dirección x, fosa Celaya (T = *25000 días)*

En las figs 6.7 a 6.10, se presentan las isolíneas de desplazamientos horizontales para tiempos de bombeo variables de 10000 a 25000 días. En ellas se aprecia que las deformaciones de extensión máximas en la superficie varían entre 0.1 y 0.16% al transcurrir el tiempo. Estas deformaciones pueden ocasionar, de acuerdo con la plasticidad del suelo superficial, un agrietamiento adicional paralelo al anterior. En efecto, la deformación de extensión necesaria para el desarrollo de una grieta en un valle sometido a bombeo varía entre 0.1 y 0.4% (ref 13). En caso de presentarse una segunda grieta, ésta se localizaría aproximadamente a 700 m de la anterior y hacia el centro del valle, como se puede apreciar en las figs 6.7 a 6.10 y como ocurrió en el caso de la fosa de Celaya (falla oriente).

7. CONCLUSIONES

El agrietamiento de valles sometidos a bombeo y con basamentos rocosos irregulares es común en México, como lo demuestran los casos del Distrito Federal, Celaya, Aguascalientes, Querétaro y Apaseo el Grande, para citar sólo algunos ejemplos.

En esta investigación se analiza el desarrollo de los esfuerzos de tensión y de las deformaciones de extensión con base en la valoración de las fuerzas de filtración mediante:

- *b)* el análisis matemático para el caso de un basamento rocoso triangular
- *c)* un esquema de diferencias finitas para el caso de un basamento rocoso de geometría cualesquiera
- *d)* el uso del programa de elementos finitos DIRT.

Estos análisis muestran ser cualitativa y cuantitativamente adecuados frente a la experiencia, en particular para el caso de la fosa de Celaya.

Permiten explicar la generación de una o varias grietas en la cercanía de los hombros del graben, así como la variación con el tiempo de los asentamientos diferenciales en el entorno de las grietas y en superficie. Su propósito es ser de utilidad para la planeación urbana definiendo *a priori* la localización de las potenciales grietas en las fronteras del valle sometido a bombeo intenso.

Obviamente, para tal fin se necesitaría ahondar mucho más en las características de los materiales involucrados, en la estratigrafía del valle, la geometría del basamento rocoso y la política prevista de bombeo.

8. REFERENCIAS

1. Orozco, J M, y Figueroa Vega, G (1991), Descripción cronológica del desarrollo de los conocimientos sobre el agrietamiento de terrenos, *Agrietamiento de suelos*; Soc Mex Mec de Suelos
2. Trujillo Candelaria, J (1989); Fallamiento de terrenos en Celaya, Gto, *Alternativas tecnológicas* 29, Academia Mexicana de Ingeniería, 367-369
3. Aranda Gómez, J M y Aranda Gómez J J (1985), Análisis del agrietamiento en la Ciudad de Aguascalientes, *Fallamiento de terrenos en Celaya*; Soc Mex Mec de Suelos
4. Trejo Moedano, A, y Martínez Baini, A (1991), Agrietamiento de suelos, zona de Querétaro, *Agrietamiento de suelos*, Soc Mex Mec de Suelos, 67-74
5. Figueroa Vega, G (1978), Discusión, *El Subsuelo y la ingeniería de cimentaciones en el área urbana del valle de México*; Soc Mex Mec de Suelos, 195-198
6. Melgoza, C (1978), Descripción, evolución y origen de los agrietamientos, *El subsuelo y la ingeniería de cimentaciones en el área urbana del valle de México*, Soc Mex Mec de Suelos, 165-175
7. Marsal, R J (1986), Notas sobre el diseño y construcción de cimentaciones en el Distrito Federal, *Publicación* 61, CFE, p 58
8. Polubarinova-Kochina, P A Ya (1962), *Theory of ground water movement*, University Press, Princeton
9. Carslaw, H S, y Jaeger, J C (1959), *Conduction of heat in solids*, Clarendon Press, Oxford 59, p 420
10. Watson, G N (1944), *A treatise on the theory of bessel functions*, Cambridge Mathematical Library, 13.24.1
11. Leconte, T, y Deltheil, R (1957), *Elements de calcul differentiel et de calcul integral,* Armand Colin, París, tomo I, p 208
12. CFE (2003), Informe túnel del río de la Compañía, *CFE, Subgerencia de geotecnia y materiales*
13. Jachens, R C, y Holzer, T L (1980), Geophysical investigations of ground failure related to ground water withdrawal, Picacho basin, Arizona, *Groundwater,* 17, 574-575.

Las ***Series del Instituto de Ingeniería*** describen los resultados de algunas de las investigaciones más relevantes de esta institución. Con frecuencia son trabajos *in extenso* de artículos que se publican en revistas especializadas, memorias de congresos, etc. Cada número de las *Series* se edita con la aprobación técnica del Comité de Publicaciones del Instituto, basada en la evaluación de árbitros competentes en el tema, adscritos a instituciones del país y/o el extranjero.

Serie Investigación y Desarrollo
Incluye trabajos originales sobre investigación o desarrollo tecnológico. Es continuación de la *Serie Azul*, publicada por el Instituto de Ingeniería desde 1956, la cual actualmente admite textos en español e inglés.

Serie Docencia
Está dedicada a monografías sobre temas especializados para algunos cursos universitarios.

Serie Memorias
Comprende artículos selectos *in extenso* presentados en congresos o reuniones similares con resultados de investigaciones realizadas por académicos del Instituto.

Serie Manuales
Abarca manuales útiles para resolver problemas asociados con la práctica profesional o insumos para investigaciones subsecuentes, tales como proyectos de normas, manuales de diseño o de laboratorio, reglamentos, comentarios a normas y bases de datos.

Serie Antologías
Está formada por compendios comentados de la obra completa o selecta de destacados investigadores y profesores de la ingeniería mexicana, para documentar, destacar y difundir contribuciones importantes a la ingeniería.

Serie Difusión
Presenta obras sobre aportaciones importantes al proceso de desarrollo e innovación en ingeniería, destinadas a lectores no especializados.

Los ejemplares de las ***Series del Instituto de Ingeniería*** se pueden imprimir gratuitamente desde la página de Publicaciones del II: http//pumas.iingen.unam.mx

Para más información sobre estas publicaciones:
moat@pumas.iingen.unam.mx y xpam@pumas.iingen.unam.mx